Construction de fractions continues periodiques uniformement bornees

Paul Mercat

CONSTRUCTION DE FRACTIONS CONTINUES PÉRIODIQUES UNIFORMÉMENT BORNÉES

par

Paul MERCAT

Résumé. — Nous construisons, dans les corps quadratiques réels, une infinité de fractions continues périodiques uniformément bornées, avec une borne qui semble meilleure que celle connue jusqu'ici. Nous faisons cela en partant de développements en fractions continues de la même forme que ceux des réels $\sqrt{n} + n$. Et ceci nous permet d'obtenir de plus qu'il existe une infinité de corps quadratiques contenant une infinité de développements en fractions continues périodiques formées seulement des entiers 1 et 2. Nous montrons aussi qu'une conjecture de Zaremba implique une conjecture de McMullen, en construisant des fractions continues périodiques à partir de développements en fractions continues de rationnels.

Table des matières

1. Introduction

Il est bien connu qu'un réel est quadratique sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang. Il est par contre remarquable que dans un corps quadratique donné il existe une infinité de fractions continues périodiques uniformément bornées. Par exemple, $\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$ contient la suite de fractions continues périodiques

$$[\overline{1, 1, 2, 1, 1, 2}]$$
$$[\overline{1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1}]$$
$$[\overline{1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1}]$$
$$[\overline{1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1}]$$
$$...$$

qui est uniformément bornée par 2. Et Wilson a démontré dans [**Wil**] qu'il y avait des suites semblables dans tous les corps quadratiques réels. Mais peut-on obtenir une borne indépendante du corps quadratique ? Par exemple, peut-on trouver dans n'importe quel corps quadratique, un réel quadratique dont le développement en fraction continue n'a que des 1 et des 2 ? Ces questions sont ouvertes. Dans son papier [**McM**], McMullen s'intéresse à de telles suites de fractions continues, et redémontre le résultat de Wilson en donnant d'autres exemples de telles suites. Il établit des liens avec des questions sur les géodésiques fermées de certaines variétés arithmétiques, ainsi qu'avec des questions de théorie des nombres sur le comptage d'idéaux.

Dans cet article, nous nous intéressons à ces suites de fractions continues périodiques qui restent dans un corps quadratique donné. Nous allons voir en particulier que dans une infinité de corps quadratiques il existe une infinité de fractions continues périodiques formées seulement des entiers 1 et 2.

1.1. Fractions continues.

— Tout réel x peut se développer en fraction continue

$$x = [a_1, a_2, a_3, ...] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{...}}}$$

avec des quotients partiels $a_i \in \mathbb{Z}$ et $a_i \geq 1$ si $i \geq 2$. Si le développement est périodique (c'est-à-dire s'il existe un entier p tel que pour tout i, on ait $a_i = a_{i+p}$),
on notera $x = [\overline{a_1, a_2, ..., a_p}]$.

Définition 1.1. — *On appellera quasi-palindromique une fraction continue de la forme* $[\overline{a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_3, a_2, a_1}]$.

Dans cette définition, la partie symétrique $a_1, a_2, ..., a_2, a_1$ peut ou non avoir un terme médian. Dans la suite, la notation $(a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k)^n$ signifie que le motif $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k$ est répété n fois.

Pour des références sur les fractions continues, on pourra consulter par exemple [**Per**], [**HP**], [**Schm**], ou encore [**Bu**].

Dans le chapitre 3, nous démontrons le résultat nouveau suivant :

Théorème 1.2. — *Si la fraction continue périodique quasi-palindromique*

$$[\overline{a_0, a_1, a_2, ..., a_2, a_1}]$$

est dans $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$*, alors il existe deux uplets d'entiers strictement positifs* $(b_1, b_2, ..., b_k)$ *et* $(c_1, c_2, ..., c_l)$ *tels que* $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ *contienne la suite non constante de fractions continues périodiques*

$$[\overline{b_1, b_2, ..., b_k, (a_0, a_1, a_2, ..., a_2, a_1)^n, c_1, c_2, ..., c_l, (a_1, a_2, ..., a_2, a_1, a_0)^n}]$$

En outre, si m *est un majorant des entiers* a_i*, alors on peut demander à ce que* $2m + 1$ *soit un majorant des entiers* b_i *et* c_i*.*

Cela permet de retrouver le résultat de Wilson [**Wil**] :

Corollaire 1.3. — *Pour tout corps quadratique* $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$*, il existe un réel* m_δ *et une infinité de fractions continues périodiques* $[\overline{a_0, a_1, ..., a_n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ *avec* $1 \leq a_i \leq m_\delta$*.*

Ici, m_δ dépend seulement de δ. Par exemple on peut prendre $m_{10} = 2$ d'après la suite annoncée au début. Nous démontrons dans le chapitre 7, que l'on peut même trouver dans tout corps quadratique réel, une infinité de fractions continues périodiques ne comportant que trois quotients partiels différents.

En appliquant le théorème aux réels $\sqrt{\delta} + \left\lfloor \sqrt{\delta} \right\rfloor$, on obtient que l'on peut prendre $m_\delta = 4\sqrt{\delta} + 1$, ce qui améliore le résultat de Wilson qui dit que l'on peut prendre $m_\delta = O(\delta)$ (voir le paragraphe 7.2 sur les réels quasi-palindromiques).

La preuve du théorème permettra aussi d'obtenir le résultat nouveau :

Théorème 1.4. — *Il existe une infinité de corps quadratiques* $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ *dans lesquels il existe une infinité de fractions continues périodiques* $[\overline{a_0, a_1, ..., a_n}]$ *avec* $a_i \in \{1, 2\}$*.*

Dans son article [**McM**], McMullen émet la conjecture suivante :

Conjecture 1.5 **(McMullen)**. — *Dans tout corps quadratique réel, il existe une infinité de fractions continues périodiques formées seulement des entiers 1 et 2.*

Les deux cas particuliers suivants semblent aussi ouverts :

Conjecture 1.6. — *Dans tout corps quadratique réel, il existe une fraction continue périodique formée seulement des entiers 1 et 2.*

Remarque 1.7. — *La conjecture 1.6 est vraie pour tous les corps quadratiques* $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ *pour* $\delta < 127$*. Par exemple,* $\mathbb{Q}[\sqrt{19}]$ *contient la fraction continue périodique de longueur 78 suivante :*

$$[\overline{2, 1, 1, 1, \mathsf{M}, 1, 1, 1, 2, {}^t\mathsf{M}}] \text{ où } \mathsf{M} \text{ est le motif suivant :}$$

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2)$$

et ${}^t\mathsf{M}$ *est le motif miroir.*

Nous avons vérifié cette remarque par ordinateur. Voir la remarque 8.4 pour plus de détails.

Remarque 1.8. — *Dans* **[JP]**, *Jenkinson et Pollicott étudient l'ensemble E_2 des réels dont le développement en fraction continue est infini et ne s'écrit qu'avec les nombres* 1 *et* 2. *La conjecture 1.6 se reformule comme suit :*
L'intersection de l'ensemble E_2 avec tout corps quadratique réel $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ est non vide.

Conjecture 1.9. — *Il existe un entier m tel que tout corps quadratique réel $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ contienne une infinité de fractions continues périodiques uniformément bornées par m.*

Nous avons obtenu un le lien entre cette conjecture sur les fractions continues périodiques et la conjecture de Zaremba suivante sur les fractions continues finies :

Conjecture 1.10 **(Zaremba).** — *Il existe une constante m telle que pour tout entier $q \geq 1$, il existe un entier p premier à q tel que l'on ait*

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

où les entiers a_i sont entre 1 *et m.*

Voici un lien entre ces deux conjectures :

Théorème 1.11. — *La conjecture de Zaremba 1.10 implique la conjecture 1.9.*

Nous obtenons ce dernier résultat comme corollaire du théorème suivant, qui permet de construire des fractions continues périodiques dans un corps donné à partir de fractions continues de certain rationnels :

Théorème 1.12. — *Soient a, b, c et δ des entiers strictement positifs tels que*
- *b et c sont solution de l'équation de Pell-Fermat : $c^2 - \delta b^2 = \pm 1$,*
- *a et c sont premiers entre eux et $a < c$.*

Alors on a l'une des égalités

$$\frac{c - a + b\sqrt{\delta}}{c} = [\overline{1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, 1, 1, a_n - 1, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1}]$$

ou

$$\frac{c - a + b\sqrt{\delta}}{c} = [\overline{1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1, 1, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1}],$$

où $[0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ est le développement en fraction continue du rationnel $\frac{a}{c}$.

Si l'on a des entiers nuls dans la fraction continue donnée par ce théorème (c'est le cas si $a_1 = 1$ ou $a_n = 1$), il suffit de remplacer chaque triplet $x, 0, y$ par $x + y$ pour obtenir une vraie fraction continue. Remarquons aussi que les entiers δ qui satisfont les hypothèses de ce théorème sont nécessairement non carrés.

À la vue du théorème 1.2, on peut se poser la question suivante, qui impliquerait la conjecture 1.9 :

Question . — *Existe-t-il une constante m telle que dans tout corps quadratique réel, il existe une fraction continue périodique de la forme $[\overline{a_0, a_1, a_2, ..., a_2, a_1}]$ uniformément bornée par m ?*

Cependant, même sans la condition sur la forme de la fraction continue périodique, le problème semble ouvert :

Conjecture 1.13. — *Il existe une constante m telle que dans tout corps quadratique réel, il existe une fraction continue périodique uniformément bornée par m.*

Nous obtenons une petite avancée dans la résolution de cette conjecture, comme corollaire du théorème 1.12, en utilisant les travaux de Bourgain et Kontorovich sur la conjecture de Zaremba. Voir corollaire 8.5.

Voici le plan de cet article :

Dans le chapitre 2 qui suit, on rappelle quelques propriétés des fractions continues et du semi-groupe des matrices positives. Dans le chapitre 3 on donne une preuve rapide du théorème 1.2. Le chapitre 4 explique pourquoi les suites de fractions continues périodiques de la forme $[b_1, b_2, ..., b_k, \overline{(a_1, a_2, ..., a_l)^n}]$ ne conviennent pas. Les chapitres 5 et 6 sont consacrés aux généralisations et réciproques des résultats qui nous ont permis d'obtenir le théorème 1.2. Et enfin, le chapitre 7 explicite les suites de fractions continues périodiques que permet d'obtenir la preuve du théorème 1.2, et donne des exemples. Nous finissons par le chapitre 8, dans lequel nous démontrons le théorème 1.12 et montrons que la conjecture de Zaremba 8.1 implique la conjecture 1.9.

Ce travail a été principalement réalisé pendant mon stage de Master, à l'université Pierre et Marie Curie, à Paris, en 2009. Je remercie Yves Benoist, qui était alors mon encadrant, pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté. Je remercie aussi Yann Bugeaud pour ses remarques qui m'ont aidées à trouver le théorème 1.12.

2. Matrices positives

Dans cette section, on s'intéresse au semi-groupe Γ des matrices positives, qui est l'ensemble des matrices de $GL_2(\mathbb{Z})$ qui correspondent à des développements en fraction continue périodique. On démontre des propriétés qui serviront par la suite.

Définition 2.1. — *Soit M une matrice de $M_2(\mathbb{R})$. On appelle discriminant de M le discriminant du polynôme caractéristique de M. Autrement dit, c'est le réel*

$$\operatorname{discr}(M) := (d-a)^2 + 4bc = \operatorname{Tr}(M)^2 - 4\operatorname{Det}(M),$$

pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Propriétés 2.2. — *Soit M une matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$.*

1. *Les valeurs propres de M sont dans le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\operatorname{discr}(M)}]$.*
2. *Les vecteurs propre de M peuvent être choisis à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\operatorname{discr}(M)}]$.*
3. *Pour tout $n \geq 1$, $\operatorname{discr}(M)$ divise $\operatorname{discr}(M^n)$ et $\frac{\operatorname{discr}(M^n)}{\operatorname{discr}(M)}$ est un carré parfait.*

Démonstration. — *1* . Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, donc sont dans $\mathbb{Q}[\sqrt{\mathrm{discr}(M)}]$.
2 . Si l'on choisis un vecteur propre de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, alors x est racine du polynôme $bx^2 + (a-d)x - c = 0$, pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Or ce polynôme a pour discriminant $\mathrm{discr}(M)$, et donc x est dans $\mathbb{Q}[\sqrt{\mathrm{discr}(M)}]$.
3 . Si λ et μ sont les deux valeurs propres de M, alors $\mathrm{discr}(M^n) = (\lambda^n - \mu^n)^2$. On a donc

$$\frac{\mathrm{discr}(M^n)}{\mathrm{discr}(M)} = (\frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu})^2 = (\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \mu^{n-i-1})^2.$$

Or, l'expression $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \mu^{n-i-1}$ est un polynôme à coefficients entiers, symétrique en λ et μ. C'est donc aussi un polynôme à coefficients entiers en la trace et le déterminant de M. Donc le nombre complexe $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \mu^{n-i-1}$ est en fait un entier. □

2.1. Notations. —

- On appelle *corps d'une matrice* $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\mathrm{discr}(M)}]$.
- On note T_i la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ où i est un entier, et on note $T_{(a_1,a_2,...,a_n)}$ le produit $T_{a_1}T_{a_2}...T_{a_n}$ pour un n-uplet d'entiers $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Cette notation est justifiée par la remarque 2.4.
- On note Γ l'ensemble des produits des matrices T_i pour $i \geq 1$ (Γ est donc le monoïde engendré par les matrices T_i, et il contient I_2), et Γ_n l'ensemble des produits de matrices T_i pour $1 \leq i \leq n$. On dit qu'une matrice est *positive* si c'est un élément du semi-groupe $\Gamma \backslash \{I_2\}$. En particulier, une matrice positive a tous ses coefficients positifs ou nuls.
- Etant donnée une matrice $P \in M_2(\mathbb{R})$, on note $P^\dagger$ l'unique matrice vérifiant $P + P^\dagger = \mathrm{Tr}(P)I_2$. Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a donc $P^\dagger = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Et si P est inversible, on peut écrire $P^\dagger = \mathrm{Det}(P)P^{-1}$.

  Les relations $P^\dagger Q^\dagger = (QP)^\dagger$ et $PP^\dagger = \mathrm{Det}(P)I_2$ permettent d'obtenir l'égalité bien utile :

$$\mathrm{Det}(P+Q) = \mathrm{Det}(P) + \mathrm{Det}(Q) + \mathrm{Tr}(PQ^\dagger) \tag{1}$$

- On appelle *longueur* d'une fraction continue périodique la plus petite période.

***Proposition 2.3* (Critère de positivité).** — *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$.
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $M \in \Gamma \backslash \{I_2\}$ *(i.e.* M *est positive)*
2. $0 \leq a \leq b \leq d$ *et* $a \leq c \leq d$

3. *Il existe un réel quadratique $x_M > 1$, dont le conjugué $\overline{x_M}$ est dans $]-1,0[$, tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ x_M \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{x_M} \end{pmatrix}$ soient des vecteurs propres de M, et les entiers b et d sont strictement positifs.*
4. *$|b-c| < d-a$ et les entiers a, b, c et d sont positifs ou nuls.*

Démonstration. — <u>$1 \Rightarrow 2$</u> Récurrence facile.

<u>$2 \Rightarrow 1$</u> Supposons que M vérifie ces inégalités. Démontrons que M est positive par récurrence sur ses coefficients.

Si $a = 0$, alors $bc = -\operatorname{Det}(M) = \pm 1$, donc $b = c = 1$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = T_d$.

Si $a = 1$, alors M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & bc+1 \end{pmatrix} = T_c T_b \text{ quand } \operatorname{Det}(M) = 1,$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & bc-1 \end{pmatrix} = T_{c-1} T_1 T_{b-1} \text{ quand } \operatorname{Det}(M) = -1.$$

Si $a \geq 2$, alors on a $\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d}{c} \right\rfloor$ (cela découle de l'égalité $ad - bc = \pm 1$). Et en posant $q = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d}{c} \right\rfloor$, la matrice $MT_q^{-1} = \begin{pmatrix} b-qa & a \\ d-qc & c \end{pmatrix}$ vérifie encore le point 2 de la proposition : l'inégalité $b - qa \leq d - qc$ résulte de $\operatorname{Det}(M \cdot T_q^{-1}) = \pm 1$ et de $2 \leq a \leq c$, et les autres inégalités sont claires. De plus, la matrice MT_q^{-1} est strictement plus petite que M, coefficients à coefficients.

<u>$2 \Rightarrow 4$</u> Clair.

<u>$3 \Leftrightarrow 4$</u> Les réels quadratiques x_M et $\overline{x_M}$ sont les racines du polynôme $Q(X) = bX^2 + (a-d)X - c$. Si b est positif, on a donc,

$$\left\{ \begin{array}{c} x_M > 1 \\ -1 < \overline{x_M} < 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} Q(1) < 0 \\ Q(-1) > 0 \\ Q(0) < 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} |b-c| < d-a \\ c > 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Et l'égalité $bc = 0$ est impossible si $|b-c| < d-a$, puisque si elle avait lieu, alors l'égalité $ad - bc = \pm 1$ et la positivité de a et de d entraîneraient que $a = d = 1$.

<u>$4 \Rightarrow 3$</u> On a $b > 0$ et $c > 0$, parce que bc est non nul. On peut donc utiliser l'équivalence (2) ci-dessus pour obtenir $x_M > 1$ et $-1 < \overline{x_M} < 0$. On a ensuite $|b-c| < d-a$ qui entraîne $d > 0$.

<u>$3 \Rightarrow 4$</u> L'équivalence (2) ci-dessus nous donne $|b-c| < d-a$ et $c > 0$. L'égalité $ad - bc = \pm 1$ et l'inégalité $bc > 0$ donnent alors que $ad \geq 0$, d'où $a \geq 0$.

<u>$4 \Rightarrow 2$</u> Si l'on avait $c < a$, on aurait $cd < ad = bc \pm 1$, donc $cd \leq bc$ puis $d \leq b$. Mais la différence $d - a < b - c$ des inégalités contredirai alors l'hypothèse $|b-c| < d-a$. Les autres inégalités $a \leq b$, $c \leq d$ et $b \leq d$ s'obtiennent de la même façon. □

Remarque 2.4. — *Le réel x_M de la proposition ci-dessus qui correspond à une matrice*

$$M = T_{(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_p)} = T_{a_1} T_{a_2} T_{a_3} \ldots T_{a_p},$$

a pour développement en fraction continue

$$x_M = [\overline{a_1, a_2, a_3, ..., a_p}].$$

La correspondance est bijective si l'entier p est la longueur.

Définition 2.5. — *Une suite (A_n) de matrices est non triviale si l'ensemble des réels x_{A_n} est infini (ce qui signifie simplement que la suite de matrices correspond à une infinité de fractions continues périodiques).*

Remarque 2.6. — *Il y a unicité de l'écriture d'une matrice de Γ comme produit de matrices T_i. En particulier, une matrice de Γ est symétrique si et seulement si son écriture comme produit de matrices T_i est symétrique.*

Les matrices positives sont toujours diagonalisables et ont des valeurs propres réelles distinctes.

Pour démontrer l'unicité de la décomposition $M = T_{i_1} T_{i_2} ... T_{i_n}$ d'une matrice positive $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il suffit de remarquer que la dernière matrice $T_{i_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i_n \end{pmatrix}$ s'obtient par la formule

$$i_n = \min(\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d}{c} \right\rfloor),$$

avec la convention $\left\lfloor \frac{b}{0} \right\rfloor = \infty$. Voir la preuve de la proposition 2.3 pour plus de détails.

On dispose également d'un critère de positivité pour les matrices de rang 1 :

Proposition 2.7. — *Soit $H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ une matrice de rang 1 vérifiant les inégalités $0 \leq a \leq b \leq d$ et $a \leq c \leq d$. Alors il existe deux matrices P et Q dans Γ et un entier $e \geq 1$ tels que $H = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} Q$. De plus, e est unique, et P et Q sont uniques modulo les relations*

$$XT_nT_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} Y = XT_{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} Y$$
$$X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} T_1T_nY = X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} T_{n+1}Y$$

pour $X, Y \in \Gamma$.

Démonstration. — On a nécessairement $e = \mathrm{pgcd}(a, b, c, d)$, d'où son unicité. On peut supposer $e = 1$ quitte à diviser H par e. Comme H est non inversible, il existe des entiers positifs ou nuls x, y, z et t tels que $H = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z & t \end{pmatrix}$ et avec x et y premiers entre eux, et z et t premiers entre eux.

La matrice P est nécessairement de la forme $P = \begin{pmatrix} u & x \\ v & y \end{pmatrix}$ pour être dans $GL_2(\mathbb{Z})$, puisque les coefficients x et y doivent être premiers entre eux. Déterminons toutes les valeurs possibles des entiers u et v pour que la matrice P soit dans Γ.

- Si $x = 0$, alors on a nécessairement $y = 1$, et donc $(u, v) = (1, 0)$ convient et est la seule solution.
- Si $x = 1$, alors les solutions sont $(u, v) = (0, 1)$ et $(u, v) = (1, y - 1)$ (le couple $(u, v) = (1, y - 1)$ est bien une solution à condition que $y \geq 2$).
- Si $x \geq 2$, alors les solutions (u, v) vérifient nécessairement les inégalités $0 \leq u < x$ et $0 \leq v < y$. Le théorème de Bézout nous donne alors l'existence et l'unicité d'une solution (u, v) vérifiant les inégalités $0 \leq u < x$ et $0 \leq v < y$ et l'équation $uy - vx = 1$, et de même pour l'équation $uy - vx = -1$. L'inégalité $u \leq v$ est alors automatiquement bien vérifiée. On a donc exactement deux solutions.

D'autre part, il est facile de vérifier que l'on a les égalités

$$T_n T_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = T_{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \text{ et que } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} T_1 T_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} T_{n+1}$$

dès que $n \geq 1$, d'où le résultat. Par transposition, on obtient également les matrices Q qui conviennent. □

3. Preuve du théorème 1.2

Dans cette partie, nous démontrons le théorème 1.2. Pour cela, nous commençons par le reformuler en termes de matrices :

Théorème 3.1. — *Soit $A = MN$ avec M et N deux matrices symétriques de Γ_q telles que l'une d'elles est de déterminant -1. Alors il existe des matrices B et C dans Γ_{2q+1} telles que pour tout n, le corps de $BA^nC\,{}^t\!A^n$ est le corps de A, et telles que la suite $BA^nC\,{}^t\!A^n$ est non triviale.*

Remarque 3.2. — *Une matrice de la forme MN, avec $M, N \in \Gamma$ symétriques et* $\mathrm{Det}(M) = -1$ *ou* $\mathrm{Det}(N) = -1$, *est toujours semblable (en faisant une permutation circulaire sur les entiers strictement positifs $m_1, ..., m_n$ qui apparaissent dans la décomposition $MN = T_{m_1}...T_{m_n}$) à une matrice de la forme $T_k M'$, $k \geq 1$, $M' \in \Gamma$ symétrique. L'énoncé du théorème 3.1 n'est donc pas plus général que celui du théorème 1.2.*

Toute la suite du chapitre est consacrée à la preuve du théorème 3.1, qui est équivalent au théorème 1.2.

Preuve du théorème 3.1. — Soient M et N deux matrices de Γ, avec $\mathrm{Det}(M) = -1$ (on peut toujours se ramener à ce cas, quitte à tout transposer). Pour tout entier k, posons

$$H_k := H_k(M, N) = MS_0 + (MN)^{2k},$$

où $S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 3.3. — *Pour toute matrice symétrique $P \in M_2(\mathbb{R})$, on a* $\mathrm{Tr}(S_0 P) = 0$.

Démonstration. — On a $\mathrm{Tr}(S_0P) = \mathrm{Tr}({}^t(S_0P)) = \mathrm{Tr}(-PS_0) = -\mathrm{Tr}(S_0P)$. □

Lemme 3.4. — *Pour tout entier k, H_k est de rang 1.*

Démonstration. — D'après la formule (1) (page 6), on a

$$\mathrm{Det}(H_k) = \mathrm{Det}(MS_0) + \mathrm{Det}((MN)^{2k}) + \mathrm{Tr}(MS_0((MN)^{2k})^\dagger),$$

et ici on a $((MN)^{2k})^\dagger = (MN)^{-2k}$ puisque $\det(MN) = \pm 1$.
Or on a d'une part $\mathrm{Tr}(MS_0(MN)^{-2k}) = \mathrm{Tr}(S_0(MN)^{-2k}M) = 0$ puisque $(MN)^{-2k}M$ est symétrique, et d'autre part $\mathrm{Det}(MS_0) = -1$ puisque $\mathrm{Det}(M) = -1$. Et comme on a de plus $\mathrm{Det}((MN)^{2k}) = 1$, le déterminant de la matrice H_k est finalement nul. La non nullité de H_k est claire, puisque la matrice $-S_0$ n'est ni dans Γ ni dans Γ^{-1}. □

Lemme 3.5. — *Pour toute matrice $C \in M_2(\mathbb{R})$, on a $CS_0\,{}^tC = \mathrm{Det}(C)S_0$.*

Démonstration. — Vérification facile. □

Lemme 3.6. — *Pour k assez grand, la matrice H_k s'écrit*

$$H_k = FT_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} T_j G$$

où i et j sont des entiers supérieurs ou égaux à 2, F et G sont des matrices de Γ et e est un entier supérieur ou égal à 1.

Démonstration. — Quitte à prendre k supérieur ou égal à 3, la matrice $N(MN)^{2k-1}$ a tous ses coefficients supérieurs ou égaux à 3 (le quatrième nombre de Fibonacci) qui est strictement supérieur à 1. Et donc si l'on pose $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = N(MN)^{2k-1}$, alors on a les inégalités strictes $0 < a < b < d$ et $a < c < d$. Les mêmes inégalités mais larges sont alors satisfaites pour la matrice $S_0 + N(MN)^{2k-1}$, et elles le sont donc encore pour la matrice $H_k = M(S_0 + N(MN)^{2k-1})$
(i.e. si $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = H_k$, alors on a $0 \leq a' \leq b' \leq d'$ et $a' \leq c' \leq d'$).

D'après la proposition 2.7, la matrice H_k s'écrit alors $H_k = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} Q$ pour des matrices P, Q dans Γ et un entier $e \geq 1$. On a ensuite

$$H_{k+2} = M(S_0 + N(MN)^{2k+3}) = MNMNM(S_0 + N(MN)^{2k-1})MNMN$$

ce qui donne $H_{k+2} = MNMNH_kMNMN$. Les relations données dans la proposition 2.7 permettent alors d'obtenir H_{k+2} de la forme annoncée (c'est-à-dire avec $i \geq 2$ et $j \geq 2$), puisque $MNMN \in \Gamma \backslash \{I_2, T_1\}$. □

On fixe k assez grand et F, G, i, j et e pour avoir $H_k = FT_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} T_j G$ comme dans le lemme 3.6. Introduisons les matrices suivantes

$$B = \begin{cases} {}^tGT_{(j-1,1,e-1,j)}G & \text{si} \quad \mathrm{Det}(G) = 1 \\ {}^tGT_{(j,e-1,1,j-1)}G & \text{si} \quad \mathrm{Det}(G) = -1 \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} FT_{(i-1,1,e-1,i)}\,{}^tF & \text{si} \quad \mathrm{Det}(F) = 1 \\ FT_{(i,e-1,1,i-1)}\,{}^tF & \text{si} \quad \mathrm{Det}(F) = -1 \end{cases}$$

Lemme 3.7. —

1. *Les matrices B et C sont dans Γ.*

2. *Chaque matrice B et C s'écrit sous la forme $N - S_0$, où N est une matrice symétrique de rang 1.*

Démonstration. — 1. Si $e > 1$, les matrices B et C sont clairement dans Γ, et si $e = 1$, l'égalité $T_{(a,0,b)} = T_{a+b}$, pour des entiers a et b, montre que B et C sont encore dans Γ.

2. Pour $k \geq 1$, la matrice $T_{(k-1,1,e-1,k)} = \begin{pmatrix} e & ek+1 \\ ek-1 & ek^2 \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme $N - S_0$ avec N symétrique de rang 1. On a donc, pour une matrice K de Γ, ${}^tKT_{(k-1,1,e-1,k)}K = {}^tKNK - \mathrm{Det}(K)S_0$ d'après le lemme 3.5, et la matrice ${}^tKNK$ est encore symétrique de rang 1. On obtient donc bien le résultat.

$\square$

Lemme 3.8. — *Pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, on a les deux égalités*

$$\mathrm{Tr}(BAC\,{}^tA) = (\mathrm{Tr}(H_kA))^2 - 2\,\mathrm{Det}(A),$$

$$\mathrm{discr}(BAC\,{}^tA) = (\mathrm{Tr}(H_kA))^2((\mathrm{Tr}(H_kA))^2 - 4\,\mathrm{Det}(A)).$$

Démonstration. — On peut écrire B et C sous la forme : $B = b_0\,{}^tb_0 - S_0$ et $C = c_0\,{}^tc_0 - S_0$ pour des vecteurs $b_0, c_0 \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ définis par $b_0 = {}^tG \begin{pmatrix} \sqrt{e} \\ j\sqrt{e} \end{pmatrix}$ et $c_0 = F \begin{pmatrix} \sqrt{e} \\ i\sqrt{e} \end{pmatrix}$. On a alors $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^tA) = \mathrm{Tr}(b_0\,{}^tb_0Ac_0\,{}^tc_0\,{}^tA) + \mathrm{Tr}(S_0AS_0\,{}^tA)$ (les deux termes $\mathrm{Tr}(S_0Ac_0\,{}^tc_0\,{}^tA)$ et $\mathrm{Tr}(b_0\,{}^tb_0AS_0\,{}^tA)$ sont nuls puisque les matrices $Ac_0\,{}^tc_0\,{}^tA$ et ${}^tAb_0\,{}^tb_0A$ sont symétriques). On a ensuite
$\mathrm{Tr}(b_0\,{}^tb_0Ac_0\,{}^tc_0\,{}^tA) = ({}^tb_0Ac_0)^2 = \mathrm{Tr}(c_0\,{}^tb_0A)^2$, et $\mathrm{Tr}(S_0AS_0\,{}^tA) = -2\,\mathrm{Det}(A)$. On vérifie que l'on a $c_0\,{}^tb_0 = H_k$, et on a alors obtenue la première égalité.

La deuxième égalité s'en déduit alors facilement :

$$\begin{aligned}\mathrm{discr}(BAC\,{}^tA) &= \mathrm{Tr}^2(BAC\,{}^tA) - 4\,\mathrm{Det}(BAC\,{}^tA)\\ &= \mathrm{Tr}^4(H_kA) - 4\,\mathrm{Tr}^2(H_kA)\,\mathrm{Det}(A) + (4-4)\,\mathrm{Det}^2(A)\\ &= \mathrm{Tr}^2(H_kA)(\mathrm{Tr}^2(H_kA) - 4\,\mathrm{Det}(A))\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 3.9. — *Pour tous entiers n et k, on a* $\mathrm{Tr}(H_k(MN)^n) = \mathrm{Tr}((MN)^{n+2k})$.

Démonstration. — On a $\mathrm{Tr}(H_k(MN)^n) = \mathrm{Tr}(MS_0(MN)^n) + \mathrm{Tr}((MN)^{n+2k})$. Or, $\mathrm{Tr}(MS_0(MN)^n) = \mathrm{Tr}(S_0(MN)^nM) = 0$, parce que $(MN)^nM$ est symétrique. $\square$

Terminons maintenant la preuve du théorème 3.1. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{discr}(B(MN)^nC(NM)^n) &= \mathrm{Tr}^2(H_k(MN)^n)(\mathrm{Tr}^2(H_k(MN)^n) - 4\,\mathrm{Det}(MN)^n)\\ &= \mathrm{Tr}^2((MN)^{n+2k})(\mathrm{Tr}^2((MN)^{n+2k}) - 4\,\mathrm{Det}(MN)^n)\\ &= \mathrm{Tr}^2((MN)^{n+2k})\,\mathrm{discr}((MN)^{n+2k})\end{aligned}$$

On vérifie que les matrices B et C sont bien dans Γ_{2q+1} (voir sections 6 et 7 pour plus de détails), et en explicitant les suites obtenues, on vérifie qu'elles sont non triviales (voir section 7). Ceci termine la preuve du théorème 3.1. $\square$

4. Fractions continues de la forme $[\overline{\mathsf{BA}^n}]$

Dans cette partie, nous expliquons pourquoi la construction précédente ne pouvait pas aboutir avec des suites de fractions continues de la forme

$$[\overline{b_1, b_2, ..., b_k (a_1, a_2, ..., a_l)^n}].$$

Nous montrons qu'il n'existe pas de suite non constante de fractions continues périodiques de la forme $[\overline{\mathsf{BA}^n}]$ dans un corps quadratique donné, ce qui se formule matriciellement de la façon suivante :

Proposition 4.1. — *Soit $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ un corps quadratique réel, et soient A et B des matrices de Γ. Si pour tout n, le corps de BA^n est $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$, alors la suite BA^n est triviale (au sens de la définition 2.5).*

On obtient même que les matrices BA^n correspondent toutes à la même fraction continue périodique, puisque l'on va montrer qu'il existe une matrice $D \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n, BA^n est une puissance de D.

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin de quelques lemmes :

Le lemme suivant permet de ramener le fait qu'une matrice soit dans un corps donné à une égalité de traces.

Lemme 4.2. — *Soit δ entier non carré. Alors il existe une matrice U dans $GL_2(\mathbb{Z})$ telle que les solutions positives x à l'équation de Pell-Fermat : $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$ sont exactement les* $\mathrm{Tr}(U^n), n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Ecrivons $\delta = k^2\delta'$ où δ' est sans facteur carré.

Supposons d'abord que $k = 1$. Montrons que dans ce cas les solutions x à l'équation de Pell-Fermat $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$ sont exactement les traces des unités (c'est-à-dire des entiers de norme ± 1) du corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta'}]$.

Pour un réel quadratique $z = x' + y'\sqrt{\delta'}$, la trace vaut $\mathrm{Tr}(z) = 2x'$ et la norme vaut $\mathrm{N}(z) = {x'}^2 - \delta' {y'}^2$. On a donc

$$\mathrm{Tr}^2(z) - \delta'(2y')^2 = 4\,\mathrm{N}(z),$$

et donc la trace est solution x de l'équation $x^2 - \delta' y^2 = \pm 4$ si et seulement si $N(z) = \pm 1$. On vérifie que si $N(z) = \pm 1$, alors z est un entier de $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta'}]$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(z)$ et $2y'$ sont des entiers, sachant que l'anneau des entiers est $\mathbb{Z}[\frac{\sqrt{\delta'}+1}{2}]$ si $\delta' \equiv 1 \pmod 4$ et est $\mathbb{Z}[\sqrt{\delta'}]$ si $\delta' \not\equiv 1 \pmod 4$. Ainsi, on obtient bien que les parties x des solutions (x, y) entières sont exactement les traces des unités. Or, le théorème des unités de Dirichlet nous donne l'existence d'une unité fondamentale $u \in O_{\delta'}^*$ dont les puissances engendrent, au signe près, le groupe des unités.

Soit U la matrice de la multiplication par u dans la base $\{1, u\}$. Alors $U \in GL_2(\mathbb{Z})$, puisque u est dans l'anneau d'entiers et son inverse aussi, et on a pour tout n, $\mathrm{Tr}(u^n) = \mathrm{Tr}(U^n)$, d'où le résultat.

Si maintenant on ne fait plus d'hypothèse sur k, on remarque qu'un couple (x, y) est solution de l'équation $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$ si et seulement si (x, ky) est solution de $x^2 - \delta' y^2 = \pm 4$ avec x et y entiers. Or, l'ensemble des unités $z = x' + y'\sqrt{\delta'}$ telles que $2y'$ est divisible par k est un sous-groupe du groupe des unités. Donc il existe une certaine puissance de la matrice U obtenue précédemment qui convient. $\square$

Le lemme suivant permettra de montrer (entre autres) que si les corps des matrices BA^n sont tous les mêmes, alors la matrice A a aussi le même corps.

Lemme 4.3. — *Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, soient A, B, C trois matrices de $M_2(\mathbb{R})$, avec A et C ayant chacune des valeurs propres distinctes en module, et avec C inversible, et soient a et b deux entiers. Si l'égalité $\mathrm{Tr}(BA^n) = \mathrm{Tr}(C^{an+b})$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors les matrices A et C^a ont mêmes valeurs propres, et l'égalité a lieu pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Si l'on appelle λ et $\overline{\lambda}$ les valeurs propres de A, avec $|\overline{\lambda}| < |\lambda|$, et μ et $\overline{\mu}$ les valeurs propres de C, avec $|\overline{\mu}| < |\mu|$, l'égalité des traces se réécrit : $\alpha\lambda^n + \beta\overline{\lambda}^n = \mu^{an+b} + \overline{\mu}^{an+b}$ pour certains réels α et β et pour tout entier $n \geq n_0$.

Regardons les termes dominants de part et d'autre. Si on avait $\alpha = 0$, on aurait $\overline{\lambda} = \mu^a$ et $\beta = \mu^b$, puis $\overline{\mu} = 0$, ce qui contredit l'inversibilité de C. On a donc $\alpha \neq 0$. On obtient donc $\lambda = \mu^a$ et $\alpha = \mu^b$, puis on obtient $\overline{\lambda} = \overline{\mu}^a$ et $\beta = \overline{\mu}^b$. Donc A et C ont mêmes valeurs propres et l'égalité a lieu pour tout $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

D'après le lemme qui suit, les matrices BA^n ont toutes pour corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ dès qu'il existe deux entiers i et j tels que les matrices BA^i et BA^j ont pour corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.

Lemme 4.4. — *Soient A et C des matrices positives ayant mêmes valeurs propres, et B et D des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ quelconques. Si la relation $\mathrm{Tr}(BA^n) = \mathrm{Tr}(DC^n)$ est vraie pour deux valeurs de n, alors elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Soient λ et $\overline{\lambda}$ les deux valeurs propres distinctes de A (et donc aussi de C). La relation $\mathrm{Tr}(BA^n) = \mathrm{Tr}(DC^n)$ se réécrit $\alpha\lambda^n + \beta\overline{\lambda}^n = 0$ pour des réels α et β indépendants de n, puisque les coefficients de chacune des deux matrices BA^n et DC^n sont des combinaisons linéaires en λ^n et $\overline{\lambda}^n$. Si la relation est vraie pour deux valeurs de n, on obtient alors un système de Cramer, donc $\alpha = \beta = 0$. $\square$

La suite de ce chapitre est consacrée à la preuve de la proposition 4.1.

Preuve de la proposition 4.1. — Supposons que l'on ait une suite de matrices BA^n ayant toutes pour corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$, où A et B sont deux matrices positives et δ est un entier sans facteur carré. Il existe alors un entier α_n tel que le discriminant $\mathrm{discr}(BA^n) = \mathrm{Tr}(BA^n)^2 - 4\,\mathrm{Det}(BA^n)$ soit égal à $\delta\alpha_n^2$. Et donc $\mathrm{Tr}(BA^n)$ est solution x de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - \delta y^2 = 4\,\mathrm{Det}(BA^n)$. D'après le lemme 4.2, il existe donc une matrice $U \in GL_2(\mathbb{Z})$ (indépendante de n) telle que pour tout n, il existe un entier i_n tel que $\mathrm{Tr}(BA^n) = \mathrm{Tr}(U^{i_n})$, et on a alors aussi $\mathrm{Det}(BA^n) = \mathrm{Det}(U^{i_n})$ à partir d'un certain rang. On peut alors utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.5. — *Soient U une matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ ayant des valeurs propres distinctes en module, $B \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice, et A une matrice positive. Si (i_n) est une suite d'entiers telles que pour tout n, $\mathrm{Tr}(BA^n) = \mathrm{Tr}(U^{i_n}) \neq 0$, alors, la suite (i_n) est arithmétique.*

Démonstration. — Si l'on appelle λ et μ les deux valeurs propres de la matrice positive A (avec $\lambda > 1$ et $|\mu| < 1$), alors la trace de BA^n s'écrit $e\lambda^n + f\mu^n$ pour certains réels e et f indépendants de n, et on a $\mathrm{Tr}(U^{i_n}) = \alpha^{i_n} + \beta^{i_n}$, où α et β sont les deux valeurs propres de la matrice U (avec α la plus grande valeur propre de U en module). En divisant par α^{i_n} de part et d'autre de l'égalité $e\lambda^n + f\mu^n = \alpha^{i_n} + \beta^{i_n}$, on obtient $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e\lambda^n}{\alpha^{i_n}} = 1$. En prenant le log, on obtient alors que $\lim_{n\to\infty} i_n \ \log(\alpha) - n \ \log(\lambda) - \log(e) = 0$. On a donc $i_n = an + b + \epsilon_n$, où $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$, $a = \dfrac{\log(\lambda)}{\log(\alpha)}$ et $b = \dfrac{\log(e)}{\log(\alpha)}$. Et comme i_n est entier, on a finalement $i_n = an + b$ à partir d'un certain rang. D'après le lemme 4.3, cela est alors vrai pour tout n, ce qui termine la preuve du lemme. □

Dans ce dernier lemme a et b sont des entiers, puisque i_0 et i_1 sont entiers, et le lemme 4.3 donne que les matrices A et U^a ont mêmes valeurs propres. On obtient donc les égalités $\mathrm{Tr}(BA^n) = \mathrm{Tr}(U^{an+b})$ et $\mathrm{Det}(BA^n) = \mathrm{Det}(U^{an+b})$ pour tout n. L'égalité des traces nous donne que dans une base dans laquelle A est diagonale, la matrice B est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha^b & * \\ * & \beta^b \end{pmatrix}$ où α et β sont les valeurs propres de U. L'égalité des déterminants $\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(U^b) = \alpha^b\beta^b$ implique alors que B est trigonale dans la base de diagonalisation de A. Les matrices A et B sont à coefficients entiers et ont un espace propre en commun : elles sont donc simultanément diagonalisables, puisque l'on obtient le deuxième espace propre par l'élement non trivial de $Gal(\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]/\mathbb{Q})$. Si l'on pose D la matrice qui vaut $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ dans la base de diagonalisation de A, on a $B = D^b$ et $A = D^a$, donc la suite BA^n est triviale. Ceci termine la preuve de la proposition 4.1. □

5. Fractions continues de la forme $[\overline{\mathbf{BAC}\,{}^t\mathbf{A}}]$

Dans ce chapitre, nous étudions les fractions continues périodiques correspondant aux matrices de la forme $BAC\,{}^tA$. Expérimentalement, de telles fractions continues périodiques apparaissent souvent, et nous allons tenter d'expliquer pourquoi, et en même temps généraliser et donner les réciproques de résultats qui permettent d'aboutir au théorème 1.2.

Nous allons voir dans ce chapitre que l'on peut ramener l'étude des suites de matrices de la forme $BA^nC\,{}^tA^n$ (qui est faite dans le chapitre 6) à l'étude de suites de la forme HA^n pour certaines matrices H non inversibles. On se ramène donc à des suites d'une forme semblable à celles qui ont étudiées dans le chapitre précédent.

Lemme 5.1. — *Soit B une matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$. On a équivalence entre les deux points suivants :*

1. *$B + {}^tB$ est de rang 1,*
2. *Il existe une matrice N symétrique de rang 1 telle que $B = N \pm S_0$,*

où S_0 est la matrice définie dans le chapitre 3.
De plus, si l'un de ces points est satisfait, alors on a $\mathrm{Det}(B) = 1$.

Démonstration. — $\Longrightarrow$ Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a l'égalité

$$0 = \mathrm{Det}(B + {}^tB) = 4ad - (b+c)^2 = 4\,\mathrm{Det}(B) - (b-c)^2.$$

Donc on obtient $\mathrm{Det}(B) = 1$ et $b - c = \pm 2$. Quitte à la transposer, la matrice B peut donc s'écrire $B = \begin{pmatrix} a & b'-1 \\ b'+1 & d \end{pmatrix}$, avec $ad = b'^2$.
$\Longleftarrow$ Clair. □

La proposition qui suit généralise le lemme 3.8.

Proposition 5.2. — *Soient B et C deux matrices de $GL_2(\mathbb{Z})$. On a l'équivalence :*

1. *Il existe une matrice $H \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1 et un réel λ tels que pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ on ait :* $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^tA) = \mathrm{Tr}^2(HA) + \lambda\,\mathrm{Det}(A)$.
2. *Les matrices $B + {}^tB$ et $C + {}^tC$ sont de rang* 1.

De plus, si l'un des points est satisfait, alors on a nécessairement $\lambda = \pm 2$, et on a l'égalité suivante pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{discr}(BAC\,{}^tA) = \mathrm{Tr}^2(HA)(\mathrm{Tr}^2(HA) \pm 4\,\mathrm{Det}(A)).$$

Tous les exemples connus de suites de fractions continues périodiques qui restent dans un corps quadratique donné (voir par exemple **[McM]**, **[Wil]** et le chapitre 7 ci-après), correspondent à des suites de matrices de la forme $BA^nC\,{}^tA^n$ avec $B + {}^tB$ et $C + {}^tC$ de rang 1. Nous ignorons si cela est toujours vrai.

L'expression du discriminant $\mathrm{discr}(BAC\,{}^tA)$ donnée par la proposition 5.2, donne une factorisation par un carré. Cela est favorable à ce que le corps quadratique de la matrice $BAC\,{}^tA$ soit petit et explique donc un peu pourquoi l'on observe un certain nombre de fractions continues périodiques de cette forme.

Preuve de la proposition 5.2. — $\Longrightarrow$ Ecrivons les matrices B et C sous la forme : $B = B_0 + \beta S_0$ et $C = C_0 + \gamma S_0$, où B_0 et C_0 sont deux matrices symétriques de $M_2(\mathbb{R})$, β et γ sont deux réels et S_0 est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\mathrm{Tr}(S_0AC_0\,{}^tA) = \mathrm{Tr}(B_0AS_0\,{}^tA) = 0$ puisque les matrices $AC_0\,{}^tA$ et ${}^tAB_0A$ sont symétriques, et on a $\mathrm{Tr}(S_0AS_0\,{}^tA) = -2\,\mathrm{Det}(A)$. On obtient donc l'égalité $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^tA) = \mathrm{Tr}(B_0AC_0\,{}^tA) - 2\beta\gamma\,\mathrm{Det}(A)$. On souhaite maintenant montrer que les matrices B_0 et C_0 sont chacune de rang 1. En évaluant la forme quadratique $A \mapsto \mathrm{Tr}(BAC\,{}^tA)$ en $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$, et en les transposées, on obtient à chaque fois des formes quadratiques en x et y qui doivent être des carrés, et qui ont à chaque fois pour matrice un multiple de B_0 ou de C_0. Ceci nous donne que les matrices B_0 et C_0 sont chacune des matrices de formes quadratiques carrées. Et ni la matrice B_0 ni la matrice C_0 ne peuvent être nulles puisque la matrice H est non nulle. Donc les matrices B_0 et C_0 sont de rang 1.

$\Longleftarrow$ Si des matrices B et C de $GL_2(\mathbb{Z})$ sont telles que $B + {}^tB$ et $C + {}^tC$ sont de rang 1, d'après le lemme 5.1 on peut les écrire sous la forme $B = b_0\,{}^tb_0 \pm S_0$ et $C = c_0\,{}^tc_0 \pm S_0$ pour des vecteurs b_0 et c_0 de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. On a alors $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^tA) = \mathrm{Tr}(b_0\,{}^tb_0 A c_0\,{}^tc_0\,{}^tA) \pm \mathrm{Tr}(S_0 A S_0\,{}^tA)$, puisque les deux termes $\mathrm{Tr}(S_0 A c_0\,{}^tc_0\,{}^tA)$ et $\mathrm{Tr}(b_0\,{}^tb_0 A S_0\,{}^tA)$ sont nuls, étant donné que les matrices $Ac_0\,{}^tc_0\,{}^tA$ et ${}^tAb_0\,{}^tb_0 A$ sont symétriques. On a ensuite $\mathrm{Tr}(b_0\,{}^tb_0 A c_0\,{}^tc_0\,{}^tA) = ({}^tb_0 A c_0)^2 = \mathrm{Tr}(c_0\,{}^tb_0 A)^2$, et $\mathrm{Tr}(S_0 A S_0\,{}^tA) = -2\,\mathrm{Det}(A)$, d'où le résultat avec $H := c_0\,{}^tb_0$.
L'expression du discriminant annoncée se déduit facilement du point 1. :

$$\begin{aligned}\mathrm{discr}(BAC\,{}^tA) &= \mathrm{Tr}^2(BAC\,{}^tA) - 4\,\mathrm{Det}(BAC\,{}^tA)\\ &= \mathrm{Tr}^4(HA) \pm 4\,\mathrm{Tr}^2(HA)\,\mathrm{Det}(A) + 4 - 4\,\mathrm{Det}(BC)\\ &= \mathrm{Tr}^2(HA)(\mathrm{Tr}^2(HA) \pm 4\,\mathrm{Det}(A)).\end{aligned}$$

□

Remarque 5.3. — *Dans la proposition 5.2, si B est de la forme $b_0\,{}^tb_0 + \epsilon_B S_0$ et C est de la forme $c_0\,{}^tc_0 + \epsilon_C S_0$ pour des vecteurs b_0 et c_0 de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ et des signes ϵ_B et ϵ_C de $\{-1, 1\}$, alors λ vaut $-2\epsilon_B\epsilon_C$ et H vaut (au signe près) $c_0\,{}^tb_0$ et ce sont les seules solutions.*

La proposition suivante permet de déterminer toutes les matrices $B \in \Gamma$ telles que $B + {}^tB$ est de rang 1.

Proposition 5.4. — *Soit $B \in \Gamma$. On a l'équivalence :*

1. *$B + {}^tB$ est de rang 1,*
2. *Il existe des entiers $k \geq 1$ et $n \geq 2$, et une matrice F de Γ tels que B ou ${}^tB$ vaut $FT_{(n-1,1,k-1,n)}\,{}^tF$.*

La transposée d'une matrice positive est positive, et on a $T_{(n,1,0,n+1)} = T_{(n,n+2)}$, donc le deuxième point de la proposition 5.4 entraîne automatiquement que B est une matrice positive.

Démonstration. — $\Longleftarrow$ Vérification facile sachant que l'on a

$$T_{(n-1,1,k-1,n)} = \begin{pmatrix} k & kn+1 \\ kn-1 & kn^2 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ Quitte à transposer la matrice B, on peut l'écrire sous la forme : $\begin{pmatrix} a & b+1 \\ b-1 & c \end{pmatrix}$ avec $ac = b^2$. On peut alors écrire les entiers a et c sous la forme : $a = zx^2$ et $c = z'y^2$ avec z et z' sans facteurs carrés. La condition $ac = b^2$ entraîne alors que $z = z'$ et $b = \pm xyz$. Comme la matrice B est dans Γ, on peut donc écrire

$$B = \begin{pmatrix} zx^2 & xyz+1 \\ xyz-1 & zy^2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad x, y, z \geq 1.$$

On peut supposer que la première matrice T_i et la dernière matrice T_j qui apparaissent dans la décomposition de B en produit de matrices T_k, $k \geq 1$, sont distinctes. En effet, ni l'identité I_2 ni les matrices T_i, $i \geq 1$ ne sont de la forme $N \pm S_0$, avec N matrice symétrique de rang 1.

On a ensuite $i = \left\lfloor \frac{xyz-1}{zx^2} \right\rfloor$ et $j = \left\lfloor \frac{xyz+1}{zx^2} \right\rfloor$, puisque $\mathrm{Det}(B) = 1 > 0$ et $zx^2 > 0$. De plus, on a $i < j$ puisque l'on a $i \neq j$. Et on a les inégalités :

$$izx^2 \leq xyz - 1 < (i+1)zx^2,$$

$$jzx^2 \leq xyz + 1 < (j+1)zx^2.$$

Donc en particulier on a $(j-i-1)zx^2 < 2$. On obtient alors deux cas :

Premier cas : $x = z = 1$

On a alors $B = \begin{pmatrix} 1 & y+1 \\ y-1 & y^2 \end{pmatrix} = T_{(y-1,y+1)} = T_{(y-1,1,0,y)}$.

Deuxième cas : $xz \geq 2$ et j = i+1

On a $y - \frac{1}{xz} < jx \leq y + \frac{1}{xz}$, avec $xz \geq 2$ et comme y et jx sont des entiers, ceci entraîne que $y = jx$. Et donc finalement

$$B = \begin{pmatrix} zx^2 & jzx^2+1 \\ jzx^2-1 & zj^2x^2 \end{pmatrix} = T_{(j-1,1,zx^2-1,j)}.$$

□

Le corollaire qui suit nous permet de connaître la matrice H qui apparaît dans l'écriture $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^t\!A) = \mathrm{Tr}^2(HA) \pm 2\,\mathrm{Det}(A)$ pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, en fonction des décompositions des matrices positives B et C comme produits de matrices T_k, données par la proposition précédente.

Etant fixée une matrice A positive de corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$, cela nous permet de ramener la recherche de matrices B et C telles que les rangs de $B + {}^tB$ et de $C + {}^tC$ sont 1, et telles que les corps des matrices $BA^nC\,{}^t\!A^n$ sont tous les mêmes, à la recherche des matrices H de rang 1 telles que $\mathrm{Tr}^2(HA)(\mathrm{Tr}^2(HA) \pm 4\,\mathrm{Det}(A))$ (c'est-à-dire le discriminant de $BAC\,{}^t\!A$) soit de la forme $\delta\alpha^2$ pour α entier.

Corollaire 5.5. — *Si l'on a*

$$\begin{array}{rcl} B & = & MT_{(m-1,1,k-1,m)}\,{}^tM, \\ C & = & NT_{(n-1,1,l-1,n)}\,{}^tN, \end{array}$$

pour $n, m \geq 1$, $k, l \geq 0$ et $M, N \in GL_2(\mathbb{Z})$, alors la matrice $H \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^t\!A) = (\mathrm{Tr}(HA))^2 \pm 2\,\mathrm{Det}(A)$ *pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, s'écrit :*

$$H = NT_n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{kl} \end{pmatrix} T_m\,{}^tM.$$

Démonstration. — On peut se ramener à $M = N = I_2$, puisque si $B = MB'\,{}^tM$ et $C = NC'\,{}^tN$, alors $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^t\!A) = \mathrm{Tr}(B'({}^tMAN)C'\,{}^t({}^tMAN))$, et $A \mapsto {}^tMAN$ décrit $M_2(\mathbb{R})$ quand A décrit $M_2(\mathbb{R})$ puisque M et N sont inversibles.

La proposition 5.2 donne bien l'existence d'une matrice $H \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^t\!A) = (\mathrm{Tr}(HA))^2 \pm 2\,\mathrm{Det}(A)$ pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, et d'après la remarque 5.3 elle est uniquement déterminée au signe près, et vaut $H =$

$\begin{pmatrix} \sqrt{ae} & \sqrt{ah} \\ \sqrt{ed} & \sqrt{hd} \end{pmatrix}$ si $B = \begin{pmatrix} a & * \\ * & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & * \\ * & h \end{pmatrix}$. Or, B vaut $\begin{pmatrix} k & mk+1 \\ mk-1 & km^2 \end{pmatrix}$, et C vaut $\begin{pmatrix} l & nl+1 \\ nl-1 & ln^2 \end{pmatrix}$, d'où le résultat. □

Corollaire 5.6. — *Soit δ un entier sans facteur carré, soit A une matrice positive, soient B et C des matrices de Γ telles que $B + {}^tB$ et $C + {}^tC$ sont de rang 1, et soit H la matrice donnée dans la proposition précédente.*
On a l'équivalence :

1. *Le corps de $BAC\,{}^tA$ ou de $BA\,{}^tC\,{}^tA$ est $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.*
2. *L'entier $\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{Tr}(HA)$ est solution x d'une équation de Pell-Fermat $sx^2 - ty^2 = \pm 4$, pour des entiers s et t tels que $\frac{1}{\sqrt{s}}H \in M_2(\mathbb{Z})$ et tels que le produit st soit de la forme δk^2.*

En particulier, il suffit que $\mathrm{Tr}(HA)$ soit solution x entière de l'équation $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$ pour que le corps de $BAC\,{}^tA$ ou de $BA\,{}^tC\,{}^tA$ soit $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.

Remarque 5.7. — *Il est facile de déterminer dans ce corollaire si c'est $BAC\,{}^tA$ ou bien $BA\,{}^tC\,{}^tA$ dont le corps est $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$. Supposons que B et C s'écrivent respectivement $N_B + \epsilon_B S_0$ et $N_C + \epsilon_C S_0$ pour des matrices N_B et N_C symétriques de rang 1.*

- *Si l'entier $\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{Tr}(HA)$ est solution x de l'équation de Pell-Fermat $sx^2 - ty^2 = 4\epsilon_B\epsilon_C \mathrm{Det}(A)$, alors la matrice $BAC\,{}^tA$ a pour corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.*
- *Si l'entier $\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{Tr}(HA)$ est solution x de l'équation de Pell-Fermat $sx^2 - ty^2 = -4\epsilon_B\epsilon_C \mathrm{Det}(A)$, alors la matrice $BA\,{}^tC\,{}^tA$ a pour corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.*

Dans la suite, nous nous intéressons surtout au cas particulier où $\mathrm{Tr}(HA)$ est solution x entière de l'équation $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$. Le cas général est plus compliqué, car les ensembles de solutions des équations de Pell-Fermat plus générales $sx^2 - ty^2 = \pm 4$ n'ont pas une structure aussi simple que pour l'équation classique où $s = 1$. On retombe quand même sur une équation de Pell-Fermat classique dans le cas où $s = \delta$ (voir les suites de type Wilson à la fin du chapitre 6).

Preuve du corollaire. — On a pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(BAC\,{}^tA) = \mathrm{Tr}(HA)^2 \pm 4\,\mathrm{Det}(A)$, et on peut choisir le signe devant le terme $4\,\mathrm{Det}(A)$ quitte à transposer C. On a alors $\mathrm{discr}(BAC\,{}^tA) = \mathrm{Tr}^2(HA)(\mathrm{Tr}^2(HA) \pm 4\,\mathrm{Det}(A)) = sx^2(sx^2 \pm 4)$ où $x = \frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{Tr}(HA)$. Le corps de $BAC\,{}^tA$ est donc $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ si et seulement si $sx^2(sx^2 \pm 4)$ est de la forme $\delta\alpha^2$, si et seulement si $sx^2 - t\alpha^2 = \mp 4$ pour un entier t tel que st est de la forme δk^2. □

Conjecture 5.8. — *Dans tout corps quadratique réel, il existe une infinité de fractions continues périodiques de la forme* $[\overline{2,1,1,1,\mathsf{A},2,1,1,1,{}^t\!\mathsf{A}}]$ *ou de la forme* $[\overline{2,1,1,1,\mathsf{A},1,1,1,2,{}^t\!\mathsf{A}}]$ *formées seulement des entiers 1 et 2.*

Ici, A est un motif $a_1, a_2, ...a_k$, avec $a_i \in \{1,2\}$, et ${}^t\!\mathsf{A}$ est le motif miroir.

Remarque 5.9. — *Pour obtenir cette conjecture, il suffirait, étant donné un entier* δ *non carré, de trouver une infinité de matrices* A *dans* Γ_2 *telles que* $\mathrm{Tr}(HA)$ *soit solution* x *entière d'une équation de Pell-Fermat* $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$*, où* H *est la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

La conjecture 1.5 de McMullen revient à trouver, pour tout δ *non carré, une infinité de matrices* A *dans* Γ_2 *telles que* $\mathrm{Tr}(A)$ *est solution* x *de l'équation de Pell-Fermat* $x^2 - \delta y^2 = 4\,\mathrm{Det}(A)$.

La conjecture 5.8 se ramène donc approximativement à la conjecture 1.5 dans laquelle on aurait remplacé la trace par la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(HA)$.

Il est malheureusement impossible de recommencer tel quel ce procédé qui nous a permis de passer de la trace à la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}(HA)$ *: Si l'on a* $\mathrm{Tr}(HBAC\,{}^t\!AD) = (g(A))^2 + \lambda\,\mathrm{Det}(A)$ *pour toute matrice* $A \in M_2(\mathbb{R})$*, alors on a* $\lambda = 0$*, quelles que soient les matrices* $B, C, D \in GL_2(\mathbb{Z})$ *et* $g \in M_2(\mathbb{R})^*$*, et donc cela ne donne plus de factorisation du discriminant par un carré.*

Remarque 5.10. — *La conjecture 5.8 est « presque » conséquence de celle de Zaremba avec une borne* 2*. Voir section 8 pour plus de détails.*

6. Fractions continues de la forme $[\overline{\mathbf{BA}^n\mathbf{C}\,{}^t\mathbf{A}^n}]$

Dans ce chapitre, nous donnons une façon de construire des suites de fractions continues périodiques qui sont dans un corps quadratique donné, et qui correspondent à des suites de matrices de la forme $BA^nC\,{}^t\!A^n$ avec $B + {}^tB$ et $C + {}^tC$ de rang 1.

6.1. Hypothèse H entière. — On supposera que B et C sont deux matrices de Γ telles que $B + {}^tB$ et $C + {}^tC$ sont de rang 1. Et on supposera que la matrice H donnée par le corollaire 5.5 (pour ces matrices B et C) est à coefficients entiers.

La proposition suivante justifie que pour une matrice positive A fixée on cherche à obtenir une relation de la forme $\mathrm{Tr}(HA^n) = \mathrm{Tr}(A^{n+k})$ pour obtenir une suite de matrices $BA^nC\,{}^t\!A^n$ qui ont toutes le même corps. Dans le cas où A est une matrice donnée par le lemme 4.2, et sous l'hypothèse H entière, cela est nécessaire.

Proposition 6.1. — *Soit* $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ *un corps quadratique réel. Sous l'hypothèse* H *entière les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*, le corps de* $BA^nC\,{}^t\!A^n$ *ou bien de* $BA^n\,{}^tC\,{}^t\!A^n$ *est* $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$*,*
2. *Il existe une matrice* $U \in GL_2(\mathbb{Z})$ *de corps* $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ *et deux entiers* a *et* b *tels que* $\mathrm{Tr}(HA^n) = \mathrm{Tr}(U^{an+b})$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{Z}$.

Et le corps de A est alors nécessairement $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.

Remarque 6.2. — *Supposons que l'on ait $B = N_B + \epsilon_B S_0$ et $C = N_C + \epsilon_C S_0$, pour des matrices N_B et N_C symétriques de rang 1, et pour des $\epsilon_B, \epsilon_C \in \{-1, 1\}$. Si l'on a $\mathrm{Tr}(HA^n) = \mathrm{Tr}(U^{an+b})$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, comme dans la proposition 6.1, alors*
- *la matrice $BA^nC\,{}^tA^n$ a pour corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ si $\epsilon_B\epsilon_C = \mathrm{Det}(U^b)$,*
- *la matrice $BA^n\,{}^tC\,{}^tA^n$ a pour corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ sinon,*

pour tout entier n.

Preuve de la proposition 6.1. — $\Longleftarrow$ En utilisant la proposition 5.2, on obtient que

$$\mathrm{discr}(BA^nC\,{}^tA^n) = \mathrm{Tr}^2(HA^n)(\mathrm{Tr}^2(HA^n) + 4\epsilon)$$

pour un $\epsilon \in \{-1, 1\}$, et on peut choisir ϵ comme l'on veut quitte à transposer C.

L'entier $\mathrm{Tr}(U^{an+b})$ est solution x d'une équation de Pell-Fermat $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$. En effet, on a d'une part que le discriminant de U^{an+b} est de la forme $\mathrm{discr}(U^{an+b}) = \delta y^2$ puisque le corps de U est $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$, et on a d'autre part les égalités $\mathrm{discr}(U^{an+b}) = \mathrm{Tr}(U^{an+b})^2 - 4\,\mathrm{Det}(U^{an+b})$, et $\mathrm{Det}(U^{an+b}) = \pm 1$.

On obtient donc, quitte à transposer C, que $\mathrm{discr}(BA^nC\,{}^tA^n)$ est de la forme δz^2, donc que le corps de $BA^nC\,{}^tA^n$ est $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$.

$\Longrightarrow$ Pour démontrer cette implication, on reprend les choses qui ont été faites pour étudier les suites de la forme AB^n (voir chapitre 4). Soit U la matrice donnée par le lemme 4.2. On a que $\mathrm{Tr}(HA^n)$ est solution x d'une équation de Pell-Fermat $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$, donc d'après le lemme 4.2, il existe une suite d'entiers (i_n) telle que pour tout n, on ait $\mathrm{Tr}(HA^n) = \mathrm{Tr}(U^{i_n})$. On est alors exactement dans la situation du lemme 4.5, et on obtient alors que la suite (i_n) est arithmétique : il existe donc deux entiers a et b tels que pour tout n, $i_n = an + b$. D'après le lemme 4.3, on a de plus que les matrices A et U^a sont semblables (i.e. ont mêmes valeurs propres), donc le corps de A est $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$. □

La proposition suivante permet de ramener la recherche de matrices non inversibles et à coefficients entiers H telles que $\mathrm{Tr}(HA)$ est solution x entière de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$ (A étant fixée), à la recherche de matrices S vérifiant certaines propriétés plus simples :

Proposition 6.3. — *Soit A une matrice positive, et b un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une matrice $H \in M_2(\mathbb{Z})$ de rang 1, telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*
$$\mathrm{Tr}(HA^n) = \mathrm{Tr}(A^{n+b}).$$
2. *Il existe une matrice $S \in GL_2(\mathbb{Z})$ telle que*
$$\mathrm{Det}(S) = -\mathrm{Det}(A^b),\ \mathrm{Tr}(S) = 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(SA) = 0.$$

Démonstration. — $\Longrightarrow$ Soit $S = H - A^b$. On a alors bien $\mathrm{Tr}(S) = 0$ et $\mathrm{Tr}(SA) = 0$. Montrons que $S \in GL_2(\mathbb{Z})$. Si l'on diagonalise A, on voit que la condition

$$\mathrm{Tr}(HA^n) = \mathrm{Tr}(A^{n+b})$$

pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, entraîne que dans la base de diagonalisation, H est de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda^b & * \\ * & \bar{\lambda}^b \end{pmatrix}$, où λ et $\bar{\lambda}$ sont les deux valeurs propres de A. Comme H est non inversible, on obtient l'égalité des déterminants $\operatorname{Det}(S) = -\operatorname{Det}(A^b)$. Et comme S est à coefficients entiers, on a bien $S \in GL_2(\mathbb{Z})$.

$\Longleftarrow$ Les égalités $\operatorname{Tr}(S) = 0$ et $\operatorname{Tr}(SA) = 0$ entraînent d'après le lemme 4.4, l'égalité $\operatorname{Tr}(SA^n) = 0$ pour tout entier n. Et par la formule 1 (page 6) on a

$$\operatorname{Det}(S + A^b) = \operatorname{Det}(S) + \operatorname{Det}(A^b) + \operatorname{Tr}(S{A^b}^\dagger),$$

où $M^\dagger = \operatorname{Det}(M)M^{-1}$. Or on a $\operatorname{Tr}(SA^{-b}) = 0$ et $\operatorname{Det}(S) = -\operatorname{Det}(A^b)$, donc $S + A^b$ est de déterminant 0. Finalement $H = S + A^b$ convient. □

Corollaire 6.4. — *Soit A une matrice positive, et soit S une matrice de $GL_2(\mathbb{Z})$ vérifiant les conditions* $\operatorname{Tr}(S) = \operatorname{Tr}(SA) = 0$ *et aussi* $\operatorname{Det}(S) = -1$ *si* $\operatorname{Det}(A) = 1$. *Alors il existe deux matrices B et C de Γ telles que les rangs de $B + {}^tB$ et de $C + {}^tC$ sont 1, et telles que les corps des matrices $BA^nC\,{}^tA^n$ sont tous les mêmes.*

Preuve du corollaire. — L'existence d'une telle matrice S nous donne, par la proposition 6.3 l'existence d'une matrice $H \in M_2(\mathbb{Z})$ non inversible telle que pour tout entier n, $\operatorname{Tr}(HA^n) = \operatorname{Tr}(A^{n+k})$ (pour un k pair si $\operatorname{Det}(S) = \operatorname{Det}(A) = -1$, k impair si $\operatorname{Det}(S) = 1$ et k quelconque sinon). Quitte à prendre k assez grand, on peut supposer que les inégalités $0 \leq a < b \leq d$ et $a < c \leq d$ sont satisfaites, où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H$, et donc la proposition 2.7 nous donne que H s'écrit : $H = X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}Y$, avec $X, Y \in \Gamma$, $e \geq 1$. Et comme on a $a < b$ et $a < c$, on obtient que X et Y sont chacun dans $\Gamma\backslash\{I_2, T_1\}$. On peut donc utiliser les relations données dans la proposition 2.7, pour se ramener à X et Y de la forme : $X = X'T_i$ et $Y = T_jY'$, avec $i, j \geq 2$ (et on a bien $e \geq 1$). D'après le corollaire 5.5, il existe donc deux matrices positives B et C telles que les rangs de $B + {}^tB$ et de $C + {}^tC$ sont 1 et telles que pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ on ait $\operatorname{Tr}(BMC\,{}^tM) = (\operatorname{Tr}(HM))^2 - 2\operatorname{Det}(MA^k)$. On a alors $\operatorname{discr}(BA^nC\,{}^tA^n) = \operatorname{Tr}^2(A^{n+k})(\operatorname{Tr}^2(A^{n+k}) - 4\operatorname{Det}(A^{n+k})) = \operatorname{Tr}^2(A^{n+k})\operatorname{discr}(A^{n+k})$, donc pour tout n, le corps de $BA^nC\,{}^tA^n$ est le corps de A. □

Remarque 6.5. — *Soient A, B et C trois matrices de Γ. Sous les trois hypothèses*

1. *que $B + {}^tB$ et $C + {}^tC$ sont de rang* 1,
2. *que la matrice H donnée par la proposition 5.4 et le corollaire 5.5 est entière,*
3. *que l'on peut prendre $U = A$ dans l'égalité* $\operatorname{Tr}(HA^n) = \operatorname{Tr}(U^{an+b})$ *donnée par la proposition 6.1,*

ceci fournit de manière exhaustive les suites de matrices $BA^nC\,{}^tA^n$ qui ont toutes le même corps.

La dernière hypothèse est automatiquement satisfaite si A est une matrice donnée par le lemme 4.2 (par exemple si $A = T_1$), et la première hypothèse est vérifiée pour tous les exemples connus. Il reste des suites infinies à étudier en retirant l'hypothèse H entière.

A l'aide de ce corollaire 6.4, on peut redémontrer rapidement le théorème 3.1 :

Preuve du théorème 3.1. — Quitte à tout transposer, on peut supposer que c'est N qui est de déterminant -1. La matrice $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} N$ vérifie alors $\mathrm{Tr}(S) = \mathrm{Tr}(SMN) = 0$ (parce que NMN est symétrique), $\mathrm{Det}(S) = -1$ et $S \in GL_2(\mathbb{Z})$, donc le corollaire 6.4 permet de conclure. □

Voici maintenant une preuve plus longue, mais qui fait apparaître naturellement la condition sur la matrice A pour que l'on ait une suite $BA^nC\,{}^t\!A^n$ de matrices ayant toutes pour corps le corps de A.

Preuve du théorème 3.1. — Étant fixée une matrice positive A, on cherche une matrice S qui vérifie les hypothèses du corollaire 6.4. Les condition $\mathrm{Tr}(S) = \mathrm{Tr}(SA) = 0$ imposent de chercher S sous la forme : $S = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{x(d-a)-cy}{b} & -x \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et on doit avoir $\mathrm{Det}(S) = \pm 1$, ce qui nous donne l'équation de Pell-Fermat :

$$(2bx + (d-a)y)^2 - \mathrm{discr}(A)y^2 = \pm 4b^2$$

On va maintenant montrer que l'on peut trouver S qui s'exprime simplement en fonction de A^n. Si l'on définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = au_n + bcv_n \\ v_0 = 0 \text{ et } v_{n+1} = u_n + dv_n \end{cases}$$

alors on a $A^n = \begin{pmatrix} u_n & bv_n \\ cv_n & u_n + (d-a)v_n \end{pmatrix}$, et comme on a $\mathrm{Det}(A^n) = \pm 1$, on obtient :

$$(2u_n + (d-a)v_n)^2 - \mathrm{discr}(A)v_n^2 = \pm 4$$

On voit donc que $(x, y) = (u_n, bv_n)$ fournit une solution. La dernière chose à vérifier est que la matrice S trouvée est à coefficients entiers. Or, cela est le cas si et seulement si b divise $d - a$, puisque b divise y et b est premier à x. Or, les matrices $A \in \Gamma$ qui vérifient cette relation de divisibilité sont exactement les matrices de la forme T_kM avec $k \geq 1$ et $M \in \Gamma$ symétrique. Ainsi on a bien démontré le théorème 3.1. Et le théorème 1.2 lui est équivalent (voir remarque 3.2). □

7. Exemples

Dans ce chapitre, nous décrivons précisément les suites de fractions continues périodiques que donne la preuve du théorème 1.2, et nous donnons des exemples, que nous vérifions directement.

Etant donnés une matrice A positive fixée, un entier k et une matrice H non inversible telle que pour tout n, $\mathrm{Tr}(HA^n) = \mathrm{Tr}(A^{n+k})$, le corollaire 5.5 et les propositions 2.7 et 5.2 permettent de trouver toutes les matrices B et C telles que

$$\text{pour toute matrice } M \in M_2(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(BMC\,{}^tM) = \mathrm{Tr}(HM)^2 \pm 2\,\mathrm{Det}(M).$$

Cela donne alors une suite de matrices $BA^nC\,{}^tA^n$ ayant toutes le même corps.

On peut déterminer explicitement quelles sont les matrices H qui sont données par la proposition 6.3, à partir des matrices S choisies ci-dessus dans la preuve du théorème, pour $N = T_i$. En prenant $A = MT_i$ pour $M \in \Gamma$ symétrique, $b = 2$ et $S = S_0T_i$ dans la proposition 6.3, on a $H = S_0T_i + MT_iMT_i$, donc on obtient :

$$H = M(\mathrm{Det}(M)S_0 + T_i)MT_i = \begin{cases} MRMT_i & \text{si} \quad \mathrm{Det}(M) = 1 \\ M\,{}^tRMT_i & \text{si} \quad \mathrm{Det}(M) = -1 \end{cases}$$

où $R := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & i \end{pmatrix}$.

Et l'on peut expliciter la décomposition de la matrice R donnée par la proposition 2.7 :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} T_{\frac{i}{2}} \qquad \text{si } i \text{ pair,}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_2T_{\frac{i-1}{2}} \qquad \text{si } i \text{ impair.}$$

On choisit alors des matrices B et C de Γ qui correspondent, par le corollaire 5.5, aux matrices H de rang 1 ci-dessus. Par exemple, si $\mathrm{Det}(M) = 1$, si i est pair, et si $M = T_jST_j$ pour une matrice symétrique S de Γ, on peut prendre :

$$\begin{array}{l} B = T_{(i,j)}ST_{(j,i/2-1,1,1,i/2,j)}ST_{(j,i)}, \\ C = T_jST_{(j-1,1,1,j)}ST_j. \end{array}$$

On obtient finalement les suites de fractions continues périodiques suivantes :

Proposition 7.1. — *Soit $\mathsf{M} = (a_1, a_2, ..., a_2, a_1)$ un uplet symétrique d'entiers strictement positifs et soient i et j deux entiers strictement positifs.*

Si i est pair, alors pour tout entier n,

$$[\overline{i/2-1,1,1,i/2,i^n,i-1,1,1,i,i^n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{i^2+4}]$$

$$[\overline{i/2-1,1,1,i/2,(j,i)^n,j-1,1,1,j,(i,j)^n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{(ij)^2+4ij}]$$

$$[\overline{i/2-1,1,1,i/2,(j,\mathsf{M},j,i)^n,j,\mathsf{M},j-1,1,1,j,\mathsf{M},j,(i,j,\mathsf{M},j)^n}]$$
$$\in \mathbb{Q}[\sqrt{\mathrm{discr}(T_{(j,a_1,a_2,...,a_2,a_1,j,i)})}].$$

Et si i est impair, alors pour tout n,

$$[\overline{(i-1)/2,1,3,(i-1)/2,i^n,i+1,i-1,i^n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{i^2+4}]$$

$$[\overline{(i-1)/2,1,3,(i-1)/2,(j,i)^n,j+1,j-1,(i,j)^n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{(ij)^2+4ij}]$$

$$[\overline{(i-1)/2,1,3,(i-1)/2,(j,\mathsf{M},j,i)^n,j,\mathsf{M},j+1,j-1,\mathsf{M},j,(i,j,\mathsf{M},j)^n}]$$
$$\in \mathbb{Q}[\sqrt{\mathrm{discr}(T_{(j,a_1,a_2,...,a_2,a_1,j,i)})}].$$

Et l'on obtient de vraies fractions continues périodiques même s'il y a des entiers nuls, en utilisant la relation $T_{(i,0,j)} = T_{i+j}$.

Ici, i^n signifie que l'entier i est répété n fois, et de même $(j, \mathsf{M}, j, i)^n$ signifie que le motif $j, a_1, a_2, ..., a_2, a_1, j, i$ est répétée n fois.

Exemple 7.2. — *En choisissant dans la proposition précédente* $i = 2$*,* $j = 2$ *et* $\mathsf{M} = (1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$*, on obtient pour tout entier* n *la fraction continue périodique*

$$[\overline{1, 1, 1, 2, (\mathsf{M}, 2, 2, 2)^n, \mathsf{M}, 3, 1, 1, 2, \mathsf{M}, (2, 2, 2, \mathsf{M})^n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

de longueur $36n + 38$*, et n'ayant que des* 1 *et des* 2*, à l'exception d'un* 3*.*

Vérification. — La proposition 7.1 donne la suite de fractions continues périodiques :

$$[\overline{0, 1, 1, 1, (2, \mathsf{M}, 2, 2)^n, 2, \mathsf{M}, 1, 1, 1, 2, \mathsf{M}, 2, (2, 2, \mathsf{M}, 2)^n}]$$

qui devient par permutation circulaire et décalage des puissances :

$$[\overline{1, 1, 1, 2, (\mathsf{M}, 2, 2, 2)^n, \mathsf{M}, 2, 0, 1, 1, 1, 2, \mathsf{M}, (2, 2, 2, \mathsf{M})^n}]$$

et on obtient enfin la suite annoncée en utilisant la relation $T_{(2,0,1)} = T_3$ (ce qui revient à remplacer le motif 2,0,1 par 3).
Il suffit alors de vérifier que le corps de la matrice $A = T_{(2,2,2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1)}$ est $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. On a $A = \begin{pmatrix} 7918 & 12929 \\ 19159 & 31284 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{discr}(A) = 1536796800 = 2 \times 27720^2$. □

Remarque 7.3. — *Il est possible de réécrire matriciellement sous une forme plus simple les suites de fractions continues données dans la proposition 7.1 :*

Le corps de la matrice $S_1(MT_i)^n S_2(MT_i)^n$ *est* $\mathbb{Q}[\sqrt{\operatorname{discr}(MT_i)}]$*,*

pour toute matrice symétrique M*, pour tout entier* $i \geq 1$*, et pour tout entier* n*, où* S_1 *et* S_2 *sont deux symétries de* $GL_2(\mathbb{Z})$*, données par*

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = T_i^{-1} T_{i/2-1} T_1 T_1 T_{i/2} = \begin{pmatrix} -i-1 & -i^2/2 - i \\ 2 & i+1 \end{pmatrix} \\ S_2 = T_i^{-1} T_j^{-1} T_{j-1} T_1 T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{si } i \text{ est pair,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = T_i^{-1} T_{(i-1)/2} T_1 T_3 T_{(i-1)/2} = \begin{pmatrix} -2i+1 & -i^2+i \\ 4 & 2i-1 \end{pmatrix} \\ S_2 = T_i^{-1} T_j^{-1} T_{j+1} T_{j-1} T_j^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{sinon,}$$

où j *est un entier quelconque.*

La proposition suivante nous donne l'existence, dans tout corps quadratique réel, d'une infinité de fractions continues périodiques qui n'utilisent que trois entiers différents.

Proposition 7.4. — *Soit* δ *un entier non carré. Alors il existe un entier* $s \geq 1$ *tel que pour tout entier* n*,*

$$[\overline{2, 1, 1, 1, (s, 1, 1, 2, 1, 1)^n, s, 1, 2, 1, 1, 1, 1, s, (1, 1, 2, 1, 1, s)^n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{\delta}].$$

Corollaire 7.5. — *Pour tout corps quadratique* $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$*, il existe un réel* m_δ *et une infinité de fractions continues périodiques* $[\overline{a_0, a_1, ..., a_n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ *avec* $1 \leq a_i \leq m_\delta$*.*

Voici des exemples de suites de fractions continues qui ne comportent que les entiers 1 et 2 et qui restent dans un corps quadratique donné :

Exemple 7.6. — *Pour tout entier n, la fraction continue périodique suivante est dans* $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ *:*

$$[\overline{2, 1, 1, 1, (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2)^n, 1, 1, 1, 1, 2, 1, (2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^n}].$$

Proposition 7.7. — *Pour tout uplet symétrique d'entiers* $\mathsf{S} = (a_1, a_2, ..., a_2, a_1)$*, et pour tout entier n, la fraction continue périodique*

$$[\overline{2, 1, 1, 1, (\mathsf{S}, 1, 1, 2, 1, 1)^n, \mathsf{S}, 1, 2, 1, 1, 1, 1, \mathsf{S}, (1, 1, 2, 1, 1, \mathsf{S})^n}]$$

est dans $\mathbb{Q}[\sqrt{\operatorname{discr}(T_{(a_1,a_2,...,a_2,a_1,1,1,2,1,1)})}]$*.*

En particulier en choisissant $\mathsf{S} = 1^{n-5}$ (c'est-à-dire l'entier 1 répété $n-5$ fois), on a des suites de fractions continues périodiques formées seulement des entiers 1 et 2 dans $\mathbb{Q}[\sqrt{f_n f_{n+2}}]$, pour tout $n \geq 3$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonnacci, définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout entier n positif ou nul $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Cela nous donne une infinité de corps quadratiques d'après le lemme suivant :

Lemme 7.8. — *L'ensemble des corps quadratiques* $\mathbb{Q}[\sqrt{f_n f_{n+2}}]$ *est infini.*

Démonstration. — Il est bien connu que pour tout n, les entiers f_n et f_{n+2} sont premiers entre eux. Montrons que pour tout nombre premier p, il existe un entier $n \geq 1$ tel que p divise f_n. La matrice T_1^n s'écrit : $T_1^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$, et si l'on note o l'ordre du groupe fini multiplicatif $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on a $T_1^o \equiv I_2 \pmod p$, donc f_o est divisible par p. Utilisons alors la propriété suivante des nombres de Fibonacci :

Propriétés 7.9. — *Soit p un nombre premier impair, et soit* $n \geq 1$ *un entier. Si* $q = p^k$ *est la plus grande puissance de p divisant* f_n*, avec* $k \geq 1$*, alors pq est la plus grande puissance de p divisant* f_{pn}*.*

Démonstration. — Comme $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, on a $T_1^n \equiv cI_2 \pmod q$ pour $c = f_{n-1}$. On peut donc écrire $T_1^n = cI_2 + qA$, pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{Z})$. On a alors

$$T_1^{pn} = (cI_2 + qA)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} c^i (qA)^{p-i} \equiv c^p I_2 + pc^{p-1} qA \pmod{p^2 q}$$

puisque $p^2 q$ divise $\binom{p}{i} c^i (qA)^{p-i}$ dès que $i < p-1$. Donc on obtient $f_{np} \equiv pc^{p-1} f_n \pmod{p^2 q}$, et comme c est premier à p, cela donne bien que la plus grande puissance de p divisant f_{np} est qp. □

Ce dernier lemme permet d'obtenir, pour tout nombre premier p impair, un entier n pour lequel p divise le facteur sans carré de f_n et donc aussi le facteur sans carré de $f_n f_{n+2}$. On en déduit que l'ensembles des corps quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt{f_n f_{n+2}}]$ est infini. □

La proposition 7.7 est une conséquence immédiate de la proposition 7.1, mais voici une vérification directe :

Preuve de la proposition 7.7. — Soient $S \in \Gamma$ symétrique, $A = ST_{(1,1,2,1,1)}$, $B = T_{(2,1,1,1)}$ et $C = ST_{(1,2,1,1,1,1)}S$. Soit alors $H = ST_1H_0$, la matrice donnée par le corollaire 5.5, où $H_0 = T_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que $\mathrm{Tr}(T_1H_0M) = \mathrm{Tr}(T_{(1,1,2,1,1)}M)$, pour toute matrice M symétrique. En effet, en prenant $M = (ST_{(1,1,2,1,1)})^nS$, on obtient alors $\mathrm{Tr}(HA^n) = \mathrm{Tr}(A^{n+1})$ qui donne bien le résultat d'après la proposition 5.2 :

$$\begin{aligned}\mathrm{discr}(BA^nC\,{}^tA^n) &= \mathrm{Tr}^2(HA^n)(\mathrm{Tr}^2(HA^n) + 4\,\mathrm{Det}(S)\,\mathrm{Det}(A^n)) \\ &= \mathrm{Tr}^2(HA)(\mathrm{Tr}^2(A^{n+1}) - 4\,\mathrm{Det}(A^{n+1})) \\ &= \mathrm{Tr}^2(HA)\,\mathrm{discr}(A^{n+1}).\end{aligned}$$

Le signe $+\,\mathrm{Det}(S)$ qui apparaît devant le terme $\mathrm{Det}(A^n)$ dans la première des égalités ci-dessus est dû au fait que si B et C sont respectivement de la forme $N_B + \epsilon_B S_0$ et $N_C + \epsilon_C S_0$ pour des matrices N_B et N_C symétriques de rang 1, alors $\epsilon_B\epsilon_C = -\,\mathrm{Det}(S)$ (voir la remarque 5.3).

Or, l'égalité $\mathrm{Tr}(T_1H_0M) = \mathrm{Tr}(T_{(1,1,2,1,1)}M)$ pour toute matrice M symétrique découle simplement de la relation $T_1\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - T_{(1,1,2,1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et du lemme 3.3. □

Vérification de l'exemple 7.6. — On a à nouveau une suite de la forme $BA^nC\,{}^tA^n$ avec cette fois $A = T_{(1,1,1,1,1,1,1,2,1,2)}$, $B = T_{(2,1,1,1)}$ et $C = T_{(1,1,1,1,2,1)}$. On démontre pour tout n l'égalité suivante :

$$\mathrm{Tr}(H(T_{(1,1,1,1,1,1,1,2,1,2)})^n) = \mathrm{Tr}((T_{(1,1,1,4)})^{2n+1})$$

où $H = T_{(1,2)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}T_2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$.

Le corps de la matrice $T_{(1,1,1,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$ est bien $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$, donc cela donnera bien le résultat, d'après la proposition 6.1 et la remarque 6.2, et parce-qu'on est dans le cas où B et C sont toutes les deux des matrices de la forme $N + S_0$, avec N matrice symétrique de rang 1, et où $\mathrm{Det}(T_{(1,1,1,4)}) = 1$. D'après le lemme 4.4, comme $T_{(1,1,1,1,1,1,1,2,1,2)} = \begin{pmatrix} 47 & 128 \\ 76 & 207 \end{pmatrix}$ et $(T_{(1,1,1,4)})^2 = \begin{pmatrix} 31 & 144 \\ 48 & 223 \end{pmatrix}$ ont mêmes valeurs propres (car mêmes traces et mêmes déterminants), il suffit de démontrer cette égalité pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n = 0$, on a $\mathrm{Tr}(H) = 16 = \mathrm{Tr}(T_{(1,1,1,4)})$. Pour $n = 1$, on a $\mathrm{Tr}(HT_{(1,1,1,1,1,1,1,2,1,2)}) = 4048 = \mathrm{Tr}((T_{(1,1,1,4)})^3)$. □

Preuve de la proposition 7.4. — Il suffit de démontrer qu'étant donné un entier δ non carré, il existe un entier $s \geq 1$ tel que le corps de la matrice $T_{(1,1,2,1,1,s)}$ est $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ (c'est ensuite un cas particulier de la proposition 7.7). Or, on a $\mathrm{discr}(T_{(1,1,2,1,1,s)}) =$

$48(s+1)(3s+4)$. Donc il suffit de prendre $s = 3y^2\delta - 1$ où (x,y) est une solution à l'équation de Pell-Fermat $x^2 - 9\delta y^2 = 1$. □

7.1. Suites de type Wilson. — On a vu comment l'on pouvait trouver des suites de fractions continues périodiques en cherchant les matrices H non inversibles du corollaire 5.5 à coefficients entiers. Cela revient à chercher $\mathrm{Tr}(HA)$ comme solution x entière de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - \delta y^2 = \pm 4$. Un autre cas intéressant est celui où H est de la forme $\sqrt{\delta}H'$, avec H' entière, et où δ est le discriminant de la matrice A. On doit alors chercher $\mathrm{Tr}(H'A)$ comme solution y (et non plus x) de la même équation de Pell-Fermat, puisque l'on a alors $\mathrm{discr}(BAC\,{}^t\!A) = \delta(\mathrm{Tr}(H'A))^2(\delta(\mathrm{Tr}(H'A))^2 \pm 4)$, que l'on veut de la forme δx^2.

Wilson donne des suites qui rentrent dans ce cadre (voir [**Wil**]), comme par exemple :

$$[\overline{(s(s+4)-1), 1, (s,1)^n, s+2, (s,1)^n, s+1}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{s(s+4)}]$$

que l'on peut réécrire avec des entiers plus petits (en choisissant d'autres matrices B et C pour la même matrice H grâce au corollaire 5.5) :

$$[\overline{s, 1, s-1, s+1, (1,s)^n, 1, s+1, s+3, 1, (s,1)^n}] \in \mathbb{Q}[\sqrt{s(s+4)}]$$

Cependant, il sera impossible d'obtenir des suites uniformément bornées avec une borne indépendante de δ avec des suites de ce type, puisque si l'on a $H = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}Q$ avec $P, Q \in \Gamma$, alors la proposition 5.4 et le corollaire 5.5 montrent que l'on a nécessairement au moins un facteur T_i avec $i > \sqrt{\delta} - 1$ dans la décomposition de l'une des matrices B ou C.

7.2. Réels quasi-palindromiques. — À la vue du théorème 1.2, on peut se demander quels sont les réels quasi-palindromiques, c'est-à-dire les réels qui ont un développement en fraction continue périodique quasi-palindromique. La proposition suivante, répond à la question :

Proposition 7.10. — *Soit $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$. On a équivalence entre :*

1. *x est quasi-palindromique,*
2. *$\mathrm{Tr}(x) = \lfloor x \rfloor$ et $x > 1$,*
3. *$\mathrm{Tr}(x) \in \mathbb{Z}$, $x > 1$ et $-1 < \overline{x} < 0$.*

On peut démontrer ce résultat en utilisant un lemme de É. Galois sur le miroir d'une fraction continue périodique (voir paragraphe 6, p. 83 dans [**Per**]).

Les réels $\sqrt{\delta} + \left\lfloor \sqrt{\delta} \right\rfloor$ sont donc des exemples de réels palindromiques. Le résultat classique suivant donne une borne optimale sur le développement de ces réels :

Proposition 7.11. — *Soit δ un entier positif sans facteur carré. Alors les coefficients du développement en fraction continue du réel $\sqrt{\delta} + \left\lfloor \sqrt{\delta} \right\rfloor$ sont majorés par $2\left\lfloor \sqrt{\delta} \right\rfloor$.*

Si l'on applique le théorème 1.2 avec ce réel $\sqrt{\delta} + \left\lfloor \sqrt{\delta} \right\rfloor$, on obtient donc une infinité de fractions continues périodiques uniformément bornées par $4 \left\lfloor \sqrt{\delta} \right\rfloor + 1$ dans le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$. Cela améliore le résultat de Wilson, puisque la borne qu'il obtient est seulement en $O(\delta)$.

8. Conjecture de Zaremba

Dans cet article, nous nous sommes intéressé au problème de majorer les coefficients de fractions continues périodiques. Voici une question similaire à propos des fractions continues finies :

***Conjecture 8.1* (Zaremba).** — *Il existe une constante m telle que pour tout entier $q \geq 1$, il existe un entier p premier à q tel que l'on ait*

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

où les entiers a_i sont entre 1 et m.

La conjecture semble vraie pour $m = 5$. Elle semble même vraie pour $m = 2$, mais à condition d'exclure un nombre fini de valeurs de q.

Des travaux récents de J. Bourgain et A. Kontorovich vont dans le sens de cette conjecture (voir [**BK**]). Plus précisément, ils démontrent que l'ensemble des entiers q qui vérifient la conjecture est de densité 1 dans $\mathbb{N}$, pour la borne $m = 50$.

Nous allons montrer que cette conjecture de Zaremba sur les développements en fractions continues de rationnels implique la conjecture 1.9 sur les développements en fractions continues périodiques d'après le résultat nouveau suivant :

Théorème 8.2. — *Soient a, b, c et δ des entiers strictement positifs tels que*
- *b et c sont solution de l'équation de Pell-Fermat : $c^2 - \delta b^2 = \pm 1$,*
- *a et c sont premiers entre eux et $a < c$.*

Alors on a l'une des égalités

$$\frac{c - a + b\sqrt{\delta}}{c} = [\overline{1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, 1, 1, a_n - 1, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1}]$$

ou

$$\frac{c - a + b\sqrt{\delta}}{c} = [\overline{1, 1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1, 1, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1}],$$

où $[0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ est le développement en fraction continue du rationnel $\frac{a}{c}$.

Si l'on a des entiers nuls dans la fraction continue donnée par ce théorème (c'est le cas si $a_1 = 1$ ou $a_n = 1$), il suffit de remplacer chaque triplet $x, 0, y$ par $x + y$ pour obtenir une vraie fraction continue. Remarquons aussi que les entiers δ qui vérifient les hypothèses du théorème ne peuvent pas être carrés.

Preuve de Zaremba ⇒ Conjecture 1.9. — Soit m la constante donnée par la conjecture de Zaremba, et soit δ un entier non carré. L'équation de Pell-Fermat $c^2 - \delta b^2 = 1$ admet alors une infinité de solutions (b, c). Pour chaque entier c assez grand d'un tel couple solution, on choisit alors un numérateur p, donné par la conjecture de Zaremba, tel que le développement en fraction continue du rationnel $\frac{p}{c}$ ne s'écrive qu'avec des entiers entre 1 et m. Si l'on choisit pour a le reste de la division de p par c, alors le théorème 8.2 nous donne une fraction continue périodique bornée par $m + 1$ et dans le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$. On obtient bien une infinité de fractions continues périodiques dans un même corps $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$, puisque pour deux rationnels $\frac{a}{c}$ distincts, le théorème donne deux fractions continues périodiques distinctes. $\square$

Preuve du théorème 8.2. — Remarquons que les fractions continues données par le théorème s'écrivent matriciellement sous la forme

$$BAC\,{}^t\!A,$$

où $A := T_{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$ est la matrice correspondant au développement du rationnel $\frac{c}{a}$,

$$B := T_{(1,1,a_1-1)} {T_{a_1}}^{-1} \text{ et } C := \begin{cases} T_{(1,1,a_n-1)} {T_{a_n}}^{-1} \\ \text{ou} \\ {T_{a_n}}^{-1} T_{(a_n-1,1,1)} \end{cases}.$$

Un rapide calcul donne $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = B$ ou ${}^tB$. Nous sommes donc dans le cadre de la proposition 5.2, avec $H := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui nous donne le discriminant

$$\operatorname{discr}(BAC\,{}^t\!A) = \operatorname{Tr}^2(HA)(\operatorname{Tr}^2(HA) \pm 4).$$

Or, la matrice A peut s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} u & a \\ v & c \end{pmatrix}$, pour des entiers u et v, puisque c'est la matrice correspondant au développement en fraction continue du rationnel irreductible $\frac{c}{a}$. On a donc $\operatorname{Tr}(HA) = 2c$, et donc $\operatorname{discr}(BAC\,{}^t\!A) = 4c^2(4c^2 \pm 4)$. En choisissant le signe, quitte à choisir $C = B$ ou $C = {}^tB$, on a donc finalement

$$\operatorname{discr}(BAC\,{}^t\!A) = 16c^2b^2\delta,$$

puisque (b, c) est solution de l'équation de Pell-Fermat $c^2 - \delta b^2 = \pm 1$. Ainsi, le corps de la matrice $BAC\,{}^t\!A$ est bien $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ comme annoncé, quitte à transposer C.

Pour vérifier l'égalité annoncée, on vérifie que le réel quadratique $x := \frac{c-a+b\sqrt{\delta}}{c}$ correspond (par la proposition 2.3) à la matrice

$$BAC\,{}^tA = \begin{pmatrix} 2ac \pm 1 & 2c^2 \\ 4ac - 2a^2 \pm 2 & 4c^2 - 2ac \pm 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre. $\square$

Grâce au théorème 8.2, pour obtenir la conjecture 1.5 de McMullen, il suffit de démontrer la variante suivante de la conjecture de Zaremba, où l'on impose en plus les premiers et le dernier entiers du développement en fraction continue.

Conjecture 8.3. — *Il existe un entier q_0 tel que pour tout entier $q \geq q_0$, il existe un entier p premier à q tel que l'on ait*

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]$$

où les entiers a_i valent chacun 1 ou 2, et avec de plus les conditions $a_1 = 2$ et $a_n = 2$.

Remarque 8.4. — *C'est en cherchant, par ordinateur, des fractions continues de la forme donnée par cette conjecture que nous sommes parvenu à vérifier la conjecture 1.6 pour tous les corps quadratiques réels $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ pour $\delta < 127$, en utilisant le théorème 8.2 ci-dessus.*

En utilisant le résultat de Bourgain et Kontorovich (voir [**BK**]) sur la conjecture de Zaremba, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 8.5. — *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers δ sans facteurs carrés vérifiant la conjecture 1.13 pour la borne $m = 51$, c'est-à-dire tels que le corps quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{\delta}]$ contienne une fraction continue périodique bornée par 51. Alors on a*

$$\#(\mathcal{D} \cap [\![1, N]\!]) \geq \frac{\sqrt{N}}{C},$$

pour une constante $C > 0$ et pour tout entier N assez grand.

Ce corollaire se déduit facilement des deux lemmes suivants :

Lemme 8.6. — *L'ensemble des entiers n tels que le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{n^2 - 1}]$ contienne une fraction continue périodique bornée par 51 a pour densité 1 dans l'ensemble des entiers naturels.*

Démonstration. — Soit n un entier vérifiant la conjecture de Zaremba pour la borne 50, c'est-à-dire tel qu'il existe un numérateur $p < n$ tel que le rationnel $\frac{p}{n}$ soit irréductible et ait un développement en fraction continue borné par 50. D'après Bourgain et Kontorovich (voir [**BK**]), l'ensemble de ces entiers n est de densité 1 dans $\mathbb{N}$.

Or, le couple $(n, 1)$ est une solution évidente de l'équation de Pell-Fermat

$$x^2 - (n^2 - 1)y^2 = 1.$$

Le théorème 8.2 s'applique donc, et on obtient que le réel quadratique

$$\frac{p + \sqrt{n^2 - 1}}{n} \quad \in \mathbb{Q}[\sqrt{n^2 - 1}]$$

a un développement en fraction continue borné par 51. □

Remarque 8.7. — *On a un résultat similaire avec les corps $\mathbb{Q}[\sqrt{n^2 + 1}]$.*

Lemme 8.8. — *L'ensemble des entiers n tels que $n^2 - 1$ soit sans facteur carré a une densité strictement positive dans $\mathbb{N}$. C'est-à-dire que l'on a*

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{1}{x} \#\{n < x | n^2 - 1 \textit{ sans facteur carré }\} > 0.$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{A}_d := \{n < x | n^2 - 1 \text{ est divisible par } d^2\}$. On a alors

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{x} \#\{n < x | n^2 - 1 \text{ sans facteur carré }\} \geq 1 - \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ p \text{ premier}}} \#A_p.$$

Or, on a

$$\#A_p \leq 2 \left\lceil \frac{x}{p^2} \right\rceil \leq 2 + \frac{2x}{p^2},$$

et donc

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ p \text{ premier}}} \#A_p \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} + \sum_{p \text{ premier}} \frac{2}{p^2} < 1.$$

□

Preuve du corollaire 8.5. — Les deux lemmes précédents permettent de dire que l'ensemble suivant a une densité strictement positive

$$\mathcal{A} := \{n | n^2 - 1 \text{ est sans facteur carré et } \mathbb{Q}[\sqrt{n^2-1}] \text{ contient une fraction continue périodique bornée par } 51\}.$$

On a donc finalement

$$\#(\mathcal{D} \cap [\![1, N]\!]) \geq \#(\mathcal{A} \cap [\![1, \lfloor \sqrt{N+1} \rfloor]\!]) \geq \frac{\sqrt{N}}{C},$$

pour une constante $C > 0$ et pour tout entier N assez grand. □

Références

[BK] J. Bourgain & A. Kontorovich, *On Zaremba's conjecture*, arXiv :1107.3776v1 [math.NT], 2011.

[Bu] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, **160**, Cambridge University Press, 2004.

[HP] G. Hardy & E. Wright *An introduction to the theory of numbers*, Oxford Mathematics, 2008.

[JP] O. Jenkinson & M. Pollicott, *Computing the dimension of dynamically defined sets I : E_2 and bounded continued fractions*, Erg. Theo. Dyn. Syst., **21**, p. 1429-1445, 2001.

[McM] Curtis T. McMullen, *Uniformly Diophantine numbers in a fixed real quadratic field*, Compositio Math., **145**, 04, p. 827-844, 2009.

[Per] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, B.G. Teubner, 1913.

[Schm] W. Schmidt *Diophantine approximation*, Lecture Note in Maths, **785**, Springer, 1980.

[Wil] S.M.J. Wilson, *Limit points in the Lagrange spectrum of a quadratic field*, Bull. S.M.F, **108**, p. 137-141, 1980.

21 janvier 2013

Paul MERCAT, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay • *E-mail :* paul.mercat@math.u-psud.fr
Url : http://www.math.u-psud.fr/~mercat